

SOMMAIRE

1. Etude expérimentale d'oscillations mécaniques – (Capes externe 2005).....	page 3
2. Oscillations mécaniques – (extrait Capes externe 2000).....	page 7
3. Oscillateur élastique vertical.....	page 13
4. Flottabilité d'un navire – (Extrait Capes externe 1989).....	page 14
5. Pendule simple dans un champ de pesanteur.....	page 17
6. Mécanique de quelques sports ou jeux.....	page 18
7. Extrait agrégation externe option chimie.....	page 26
8. Etude cinématique du système bielle – manivelle (Capes 2003)	page 28
9. Mouvements couplés d'un plateau et d'un galet.....	page 29
10. Extrait Capes interne 2000.....	page 34
11. Extrait du capes interne section physique et application 2004.....	page 38
12. Etude des chocs (Extrait du Capes externe 1990).....	page 42
13. Forces centrales – Extrait Capes externe 1999.....	page 49
14. Capes externe 1992.....	page 51
15. Coniques – Extrait Capes physique et application 2000.....	page 55
16. Mouvement dans un champ gravitationnel – PEA 2003.....	page 60
17. Eclipse - Extrait Capes interne 1998.....	page 67
18. Satellites artificiels – Extrait Capes externe 2002.....	page 72

Extrait du rapport de jury 2005

« En conclusion et au risque de reprendre les observations des rapports des années précédentes, le jury attend d'un futur professeur de sciences physiques une maîtrise des concepts fondamentaux de la physique classique, concepts souvent initiés au collège et au lycée, une capacité à les faire vivre dans des cas concrets, modélisés simplement, en adoptant une démarche rigoureuse empreinte d'honnêteté intellectuelle. Enfin, la physique est une science vivante, inscrite dans l'histoire des civilisations, et qui diffuse par ses applications et ses conséquences dans les objets ou les situations que croisent ou rencontrent tout un chacun. Par ailleurs, L'histoire des sciences étant devenue un des moyens d'enseigner cette discipline et d'intéresser les élèves, ses rudiments ne peuvent plus être ignorés par les futurs professeurs. »

Jean - Pierre Sarmant

Etude expérimentale d'oscillations mécaniques - extrait capes externe 2005

1. Quelques généralités

1.1. Définissez successivement les termes : référentiel, repère, base de projection.

1.2. Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ?

1.3.a. Qu'appelle-t-on référentiel terrestre local ? Est-il galiléen ?

1.3.b. Pourquoi l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ varie-t-elle au niveau du sol entre les pôles et l'équateur ? Où est-elle la plus grande ?

1.4. Qu'appelle-t-on un oscillateur ? Donner quelques exemples.

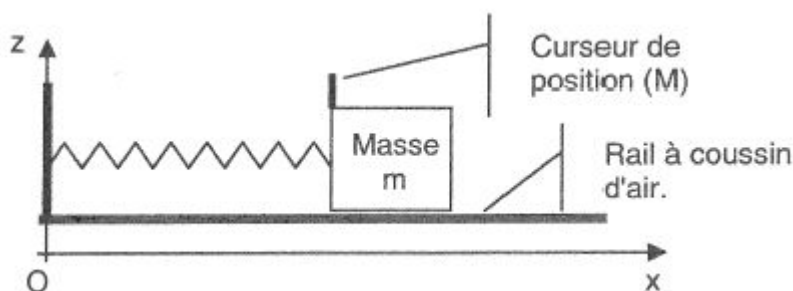
1.5. Proposer un protocole expérimental permettant de mesurer la constante de raideur d'un ressort.

On réalise le dispositif suivant : un objet de masse m est attaché à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide L_0 et posé sur un rail horizontal.

Un dispositif expérimental permet de relever la position M de l'objet en fonction du temps.

On notera $\vec{OM} = x \cdot \vec{u}_x$ et on notera X la position de l'objet par rapport à sa position d'équilibre.

On se placera dans le référentiel terrestre local supposé galiléen.



Données numériques : $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$; $m = 100 \text{ g}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

2. Oscillations idéales (sans frottements)

La masse m est posée sur un rail à coussin d'air horizontal (en fonctionnement). On supposera donc qu'il n'y a pas de pertes par frottements entre le rail et l'objet.

2.1. Etude expérimentale.

A l'aide du dispositif expérimental et d'un tableur, un enseignant trace la courbe en annexe : **Oscillations 1**

- 2.1.a.** De quel type de mouvement s'agit-il ?
- 2.1.b.** Quelles ont été les conditions initiales ?
- 2.1.c.** Déterminer la période du mouvement.

2.2 Etude théorique

On suppose que l'objet a été écarté de sa position d'équilibre d'une distance X_0 et lâché sans vitesse initiale.

2.2.a. Etude dynamique

2.2.a.1. Faire un bilan des forces et en déduire l'équation différentielle dont $X(t)$ est solution.

2.2.a.2. Calculer $X(t)$. On notera ω_0 la pulsation propre de ce système.

2.2.a.3. Calculer la période d'oscillation T et comparer à la valeur expérimentale du

2.1.c

2.2.b. Etude énergétique

2.2.b.1. Définir l'énergie potentielle associée à une force $\vec{F}$. On précisera les conditions d'existence de cette grandeur.

2.2.b.2. Quelle serait l'énergie potentielle associée à une force $\vec{F}_r = -k(x - L_0) \cdot \vec{u}_x$? On précisera le choix de l'origine pour cette énergie.

2.2.b.3. Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.

2.2.b.4. Retrouver l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème de l'énergie mécanique.

2.3. Premier élève

Au cours de la séance de T.P. Un élève recueille la courbe en annexe : **Oscillations 2**. Expliquer ce qu'a fait l'élève.

3. Deuxième élève ; oscillations amorties

L'objet de masse m est toujours posé sur un rail à coussin d'air horizontal.

Un des élèves s'est amusé à mettre une « voile » sur l'objet. Il apporte alors à son professeur la courbe $X(t)$ en annexe : **Oscillations 3**

3.1. Etude expérimentale

3.1.a. De quel type de mouvement s'agit-il ?

3.1.b. Quelles ont été les conditions initiales ?

3.1.c. Ce mouvement est-il périodique ? Donner l'équation de l'enveloppe : courbe qui rejoint les maxima.

3.1.d. A l'aide du graphique et des données numériques du 1., évaluer l'énergie qui a été dissipée au cours de la première oscillation.

3.2. Etude théorique

On suppose que l'objet a été écarté de sa position d'équilibre d'une distance X_0 et lâché sans vitesse initiale.

On modélise la force due à la « voile » par une force de frottement « fluide » :

$$\vec{F}_{flu} = -a\vec{v}, \text{ avec } \vec{v} \text{ vecteur vitesse } (\vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x).$$

3.2.a. Etude dynamique.

3.2.a.1. Faire un bilan des forces et en déduire l'équation différentielle dont $X(t)$ est solution.

On mettra cette équation sous la forme : $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$; ξ et ω_0 sont des constantes à déterminer en fonction de a , k et m .

3.2.a.2. Montrer que $X(t) = X_0 \cdot e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \cos(\Omega t)$ dans le cas où $\xi > 1$, avec Ω à déterminer en fonction de a , k et m .

3.2.a.3. Comment appelle-t-on Ω ? Que deviendrait le mouvement si $\xi > 1$?

3.2.a.4. A l'aide du graphique et des données numériques du 1., calculer ξ et en déduire la valeur du coefficient de frottement a .

3.2.b. Etude énergétique

On veut évaluer le travail de la force $\vec{F}_{flu} = -a\vec{v}$ pour en déduire la valeur du coefficient de frottement a .

On suppose que pendant la première pseudo-période T : $X(t) \approx X_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$.

3.2.b.1. Exprimer la puissance instantanée reçue par l'objet de la part de $\vec{F}_{flu}$.

3.2.b.2. Que vaut alors son travail entre $t=0$ et $t=T$?

3.2.b.3. En utilisant la valeur de l'énergie dissipée trouvée en 3.1.d, retrouver la valeur de a . La comparer à celle trouvée au 3.2.a.4.

4. Troisième élève

La masse m est toujours posée sur un rail à coussin d'air horizontal.

Un des élèves apporte alors la courbe $X(t)$ en annexe : **oscillations 4**.

Devant l'air étonné du professeur, il avoue qu'il n'a pas mis la soufflerie en marche.

4.1. Etude expérimentale.

4.1.a. De quel type de mouvement s'agit-il, et quelles ont été les conditions initiales ?

4.1.b. La dissipation d'énergie est-elle due à une force de frottement « fluide » ?

4.1.c. A l'aide du graphique et des données numériques du 1., évaluer l'énergie qui a

été dissipée au cours de la première $\frac{1}{2}$ oscillation (de $t=0$ à $t=t_1$ instant correspondant au premier minimum de X).

4.2. Etude théorique

On suppose que l'objet a été écarté de sa position d'équilibre d'une distance X_0 et lâché sans vitesse initiale.

On note $\vec{R} = \vec{R}_T \cdot \vec{u}_x + R_N \cdot \vec{u}_z$ la réaction du support, dont on suppose qu'elle vérifie les lois de Coulomb du frottement solide. On confondra les coefficients de frottement statique et dynamique, on notera alors f le coefficient de frottement.

4.2.a. Enoncer les lois de Coulomb du frottement solide.

4.2.b. Lorsque le solide est arrêté, la position expérimentale du point M est donnée par $X(t \rightarrow \infty) = 0,8 \text{ cm}$.

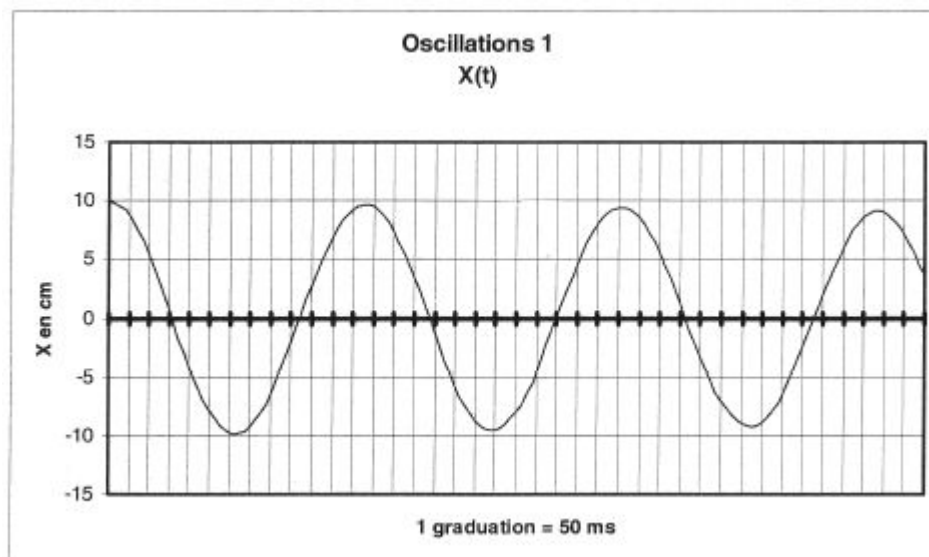
En déduire la valeur de la réaction tangentielle lorsque le solide est à l'arrêt.

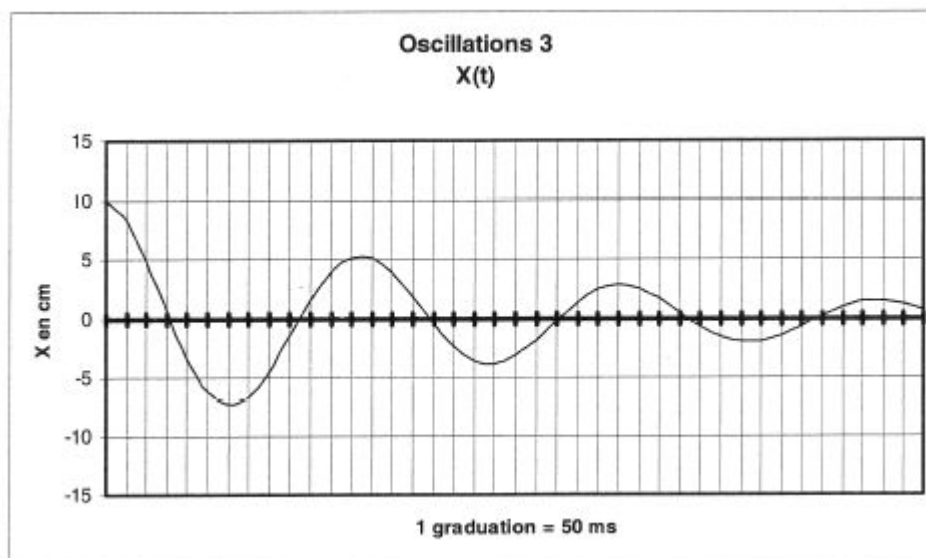
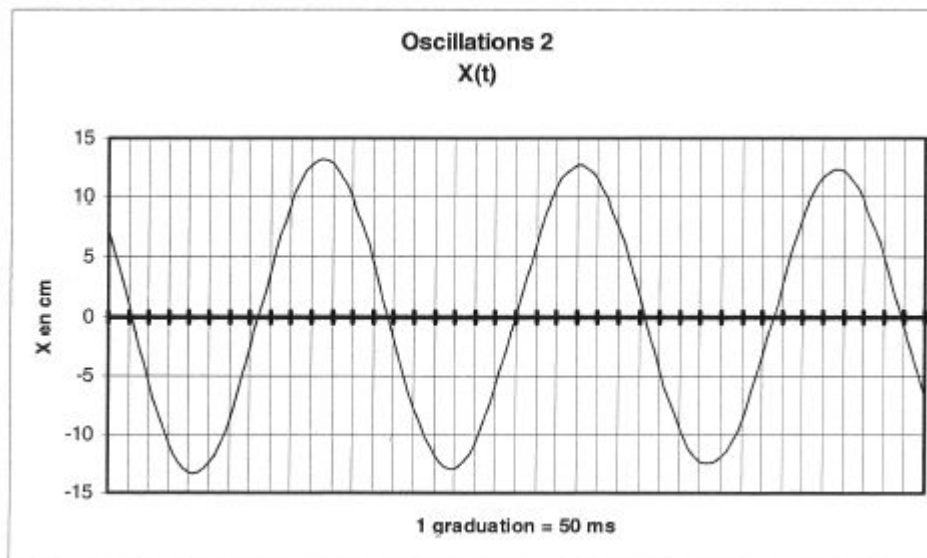
4.2.c. Représenter les forces qui s'exercent sur l'objet pendant le mouvement de t à t_1 .

4.2.d. Calculer littéralement le travail de la réaction $\vec{R}$ en fonction de $X(0)$ et $X(t_1)$

4.2.e. En utilisant la valeur de l'énergie dissipée trouvée au 4.1.c, trouver la valeur de f .

Annexe : Oscillations mécaniques : Courbes expérimentales.





Oscillations mécaniques – (extrait Capes externe 2000)

I. Détermination d'un coefficient de viscosité

1.1 Questions préalables :

Quelles réponses donneriez-vous aux questions posées par un élève de terminale ?

1.1.a. Qu'appelle-t-on référentiel galiléen ?

1.1.b. Qu'appelle-t-on mécanique newtonienne ?

1.1.c. Qu'appelle-t-on fluide parfait ?

On se propose de déterminer la valeur du coefficient de viscosité η d'un liquide. On étudie pour cela le mouvement oscillatoire amorti d'une bille accrochée à un ressort (figure 1). On choisit un axe Ox dont l'origine est à l'extrémité basse du ressort dans la position d'équilibre du système. La direction est la verticale orientée dans le sens descendant.

1.2 On réalise d'abord l'expérience dans l'air. On utilise une bille sphérique d'aluminium de masse volumique μ_1 , de rayon $r=1$ cm et de masse m . On accroche la bille à un ressort, supposé sans masse, de raideur k et de longueur à vide l_0 . Les notations seront celles de la figure 1.

A l'équilibre du système, la longueur du ressort est l_e .

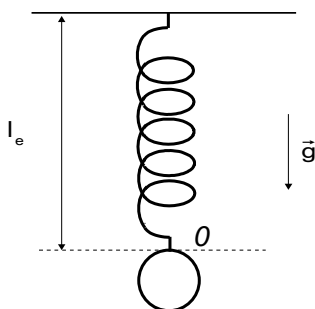


Figure 1

1.2.a. Etablir l'expression de l'allongement du ressort à l'équilibre en fonction des paramètres caractérisant le système.

Calculer sa valeur avec les données suivantes :

- ✓ masse volumique de l'aluminium : $\mu_1=2700\text{ kg.m}^{-3}$
- ✓ raideur $k=3\text{ N.m}^{-1}$
- ✓ $g=9,81\text{ m.s}^{-2}$.

1.2.b. On écarte, verticalement, la bille de sa position d'équilibre ($x(t=0)=1\text{ cm}$) et on lâche sans vitesse initiale ($v(t=0)=0$) .

En utilisant une approche énergétique, établir l'équation différentielle du mouvement.

En déduire l'expression de la pulsation ω_0 et de la période T_0 des oscillations.

A partir des données numériques précédentes, calculer la valeur de la période T_0 .

Ecrire l'équation horaire $x(t)$ du mouvement observé.

1.2.c. On appelle « trajectoire de phase » la courbe décrite par un point $P(t)$ de coordonnées $X(t)=x(t)$ et $Y(t)=v(t)/\omega_0$ dans le plan de phase OXY . Représenter cette trajectoire de phase. La forme de cette courbe permet-elle de déterminer la nature du mouvement ?

1.3. On effectue maintenant l'expérience en plongeant la bille dans de l'huile de viscosité η que l'on cherche à déterminer.

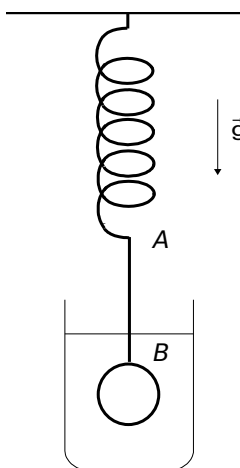


Figure 2

La masse volumique de cette huile est égale à $\mu_2=800\text{ kg.m}^{-3}$

Les notations sont celles de la figure 2.

La tige AB est supposée de masse nulle, le frottement de l'huile et la poussée d'Archimède sur cette tige sont supposés nuls.

Le ressort n'entre pas dans l'huile.

1.3.a. L'allongement du ressort dans sa position d'équilibre est-il identique à celui de la question 1.2.a. ? Justifier la réponse.

1.3.b. On suppose que, dans l'huile, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la loi de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v} = -h\vec{v}$$

Le coefficient de viscosité η se mesure en poiseuille (PI). Quelle est la dimension de cette grandeur ?

1.3.c. On écarte à nouveau la sphère de sa position d'équilibre d'une longueur $x(t=0)=a$ et on lâche sans vitesse initiale.

Etablir l'équation différentielle du mouvement.

1.3.d. On pose $Q = m\omega_0/h$. Etablir l'expression de Q en fonction de η, k, r et μ_1 .

1.3.e. Lorsque $Q > 1$, donner l'expression de la pseudo-période, on mesure les élongations maximales du ressort. Les valeurs expérimentales obtenues sont reportées dans le tableau suivant :

$x(t)$ en cm	6	4,45	3,30	2,45	1,8	1,35
$\ln(x(t))$						

Ces valeurs permettent de supposer $Q \gg 1$.

Après avoir complété le tableau sur votre copie, déduire de cette expérience les valeurs du coefficient Q et du coefficient de viscosité η .

II. Etude d'un pendule simple

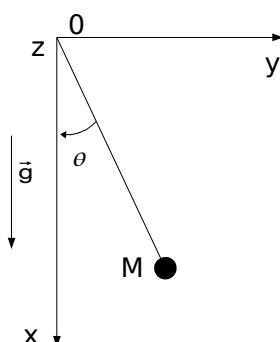


Figure 3

On considère le mouvement d'un pendule simple qui oscille dans un milieu où les forces de frottement sont inexistantes. Le pendule est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , accroché par l'intermédiaire d'un fil rigide à un point fixe O (figure 3).

On suppose le fil rigide sans masse. Sa longueur est $l=1\text{m}$. On note $\theta(t=0)=\theta_0$ et on lâche sans vitesse initiale.

II.2.1 Oscillations de faible amplitude

II.2.1.a. Enoncer le théorème du moment cinétique appliqué à ce point matériel.

II.2.1.b. Montrer que la trajectoire du point matériel M est plane.

II.2.1.c. Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ en fonction du temps.

Donner l'expression de la pulsation ω_0 du mouvement.

II.2.1.d. On a mesuré pour 20 périodes une durée de 40,12 s. Déduire de cette expérience une valeur de g.

II.2.1.di.

II.2.2 Cas général

On se place maintenant dans le cas d'oscillations d'amplitude plus importante. On désigne par E_m , l'énergie mécanique, par E_p , l'énergie potentielle et par E_c l'énergie cinétique du pendule.

II.2.2.a. Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle en fonction de m,

g, l, θ et $\frac{d\theta}{dt}$. (On prendra comme convention d'origine pour l'énergie potentielle

$E_p = 0$ pour $\theta = 0$).

II.2.2.b. En déduire que l'équation de la trajectoire dans le plan de phase du point P de

coordonnées $\theta(t)$ et $y(t) = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\theta}{dt}$ peut se mettre sous la forme :

$$y^2 + 2(1 - \cos(\theta)) = \frac{2E_m}{mgl}$$

II.2.2.c. L'allure générale du portrait de phase de cette équation est donnée à la figure 4 ci-dessous.

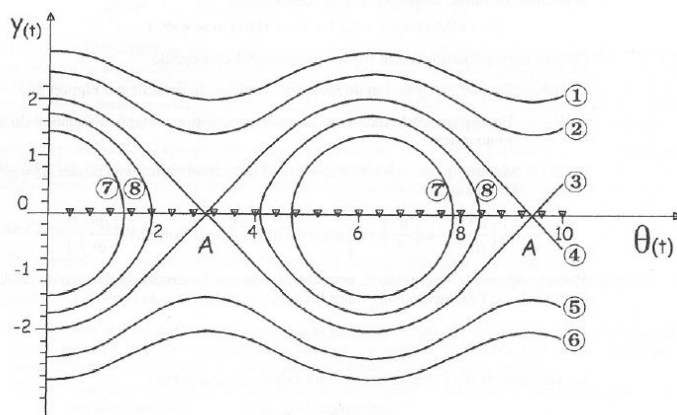


Figure 4

En reprenant les notations de la figure 4 :

Quelles sont les trajectoires de phase correspondant à $E_m \ll 2mgl$?

A quelle situation correspondent les points A de la figure 4 ?

Quelles sont les courbes correspondant :

- a. à un mouvement oscillatoire périodique autour d'une position d'équilibre stable ?
- b. à un mouvement de révolution ?

III. La résonance paramagnétique

Depuis des siècles, en la cathédrale de Saint-Jacques-de-Compostelle, un très gros encensoir d'une cinquantaine de kilogrammes, accroché à une corde d'une vingtaine de mètres, est mis en oscillation. Il est manipulé par huit hommes et atteint une amplitude de 80 degrés.

L'étude suivante se propose de modéliser le comportement de ce système.

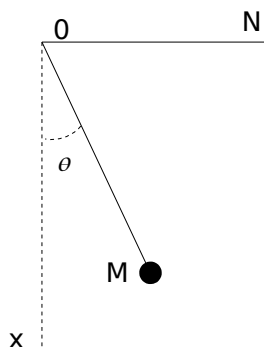


Figure 5

III.1. On considère un pendule simple de longueur variable $l(t)$, réalisé à l'aide d'un fil inextensible (MON) coulissant au travers d'un anneau en O. Son extrémité N est animé d'un mouvement sinusoïdal de faible amplitude (figure 5) de sorte que :

$$OM(t)=l(t)=l_0(1+\varepsilon \cos(\Omega t)) \text{ avec } \varepsilon \ll 1.$$

On agit ainsi périodiquement sur la longueur OM du pendule.

III.1.a. Donner l'expression du moment cinétique du pendule par rapport à O.

III.1.b. En appliquant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle

du mouvement.

III.1.c. Montrer qu'en se limitant aux termes du second ordre, et en posant $\omega_0^2 = g/l_0$, on obtient l'équation :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} \right) = \varepsilon \left[\omega_0^2 \cos(\Omega t) \theta \frac{d\theta}{dt} + 2 \Omega \sin(\Omega t) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

III.2. Par une approche énergétique, on peut déterminer la condition de résonance.

Une solution approchée de l'élongation angulaire $\theta(t)$ peut se mettre sous la forme

$$\theta(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La variation de $A(t)$ avec le temps étant faible, on peut écrire :

$$\frac{dA}{dt} \ll \frac{\omega_0 A}{2\pi}$$

On suppose de plus que l'énergie mécanique E est proportionnelle au carré A^2 de l'amplitude A .

III.2.a. Dans ces conditions, montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \varepsilon \left[2 \Omega \sin(\Omega t) - \left(\frac{\omega_0}{2} + \Omega \right) \sin((2\omega_0 + \Omega)t + 2\varphi) - \left(\frac{\omega_0}{2} - \Omega \right) \sin((2\omega_0 - \Omega)t + 2\varphi) \right]$$

III.2.b. On se propose de calculer la moyenne de $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}$.

Calculer la moyenne du second membre de l'équation précédente dans les deux cas suivants :

III.2.b.(i). Ω différent de $2\omega_0$;

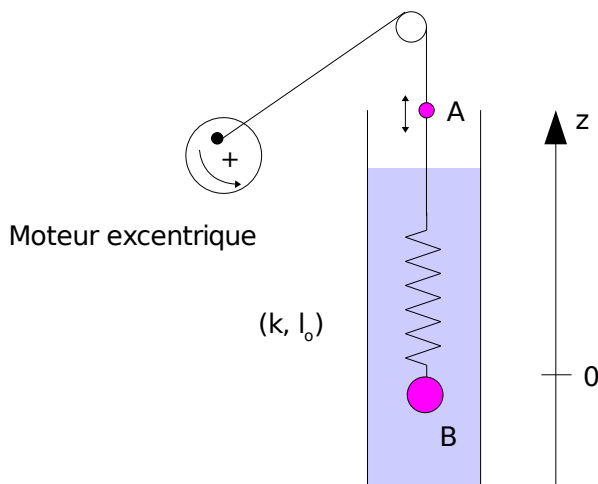
III.2.b.(ii). Ω égal à $2\omega_0$; Montrer, dans ce deuxième cas, que l'énergie croît exponentiellement.

C'est le phénomène de résonance paramétrique

Oscillateur élastique vertical

Considérons le dispositif schématisé ci-dessous. Une boule d'acier B de masse $m=100$ g est fixée à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . La boule est plongée dans un liquide, ce qui entraîne l'existence d'une force de frottement visqueux, de

coefficient h . L'autre extrémité du ressort, notée A, est liée à une ficelle entraînée par un moteur excentrique qui impose un mouvement sinusoïdal de pulsation réglable ω au point A, avec une amplitude a . Donner l'équation du mouvement de la boule B (nous négligerons la poussée d'Archimède sur la boule).



1. Pour quelle fréquence du vibreur aura-t-on la résonance d'amplitude ?
2. A partir des renseignements donnés ci-dessous effectuer le calcul de la fréquence de résonance en amplitude,
 - quand on accroche, dans l'air, la boule B à l'extrémité du ressort, celui-ci s'étire de 10 cm à l'équilibre. On prendra l'accélération de la pesanteur g égale à $10 m.s^{-2}$.
 - quand on plonge le système dans le liquide, et que l'on enregistre le régime libre, (on comprime le ressort, puis on lâche la boule), on s'aperçoit que le mouvement est pseudo-périodique, et la mesure du décrement logarithmique est de 1,62.

Flottabilité d'un navire – (Extrait Capes externe 1989)

On se propose d'étudier quelques problèmes liés à la flottabilité et à la stabilité d'un navire. Pour simplifier cette étude, dans tout l'exercice, on assimile ce navire à un parallélépipède droit (hauteur : H ; base rectangulaire de dimensions : l et L) de masse volumique ρ supposée uniforme.

Il est immergé dans de l'eau de masse volumique ρ_0 .

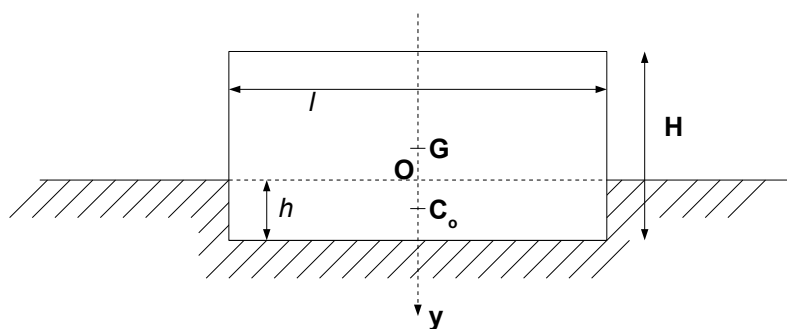


Figure 1

Données numériques : $L = 8,00 \text{ m}$; $l = 2,50 \text{ m}$; $H = 1,50 \text{ m}$; $\rho_0 = 1\,000 \text{ kg.m}^{-3}$; $g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$.

On néglige la poussée d'Archimède dans l'air et tous les frottements.

La carène est le volume de la partie immergée. Soit G le centre d'inertie du navire et C_o le « centre de carène » (centre de volume de la carène) lorsque le navire flotte normalement en eau calme.

A.1. Quelles sont les conditions d'équilibre du navire immobile ?

Exprimer la hauteur h de la partie immergée (« tirant d'eau »).

Montrer que la lecture du tirant d'eau h permet de « peser » le navire lorsque sa charge varie.

Calculer numériquement la masse et la masse volumique du navire dans le cas où $h=0,30 \text{ m}$.

A.2. Le navire peut osciller verticalement autour de sa position d'équilibre.

Exprimer littéralement et calculer numériquement la période de ces oscillations en fonction de ρ , H , ρ_0 et g .

A.3. On se propose d'étudier la stabilité de l'équilibre par rapport aux mouvements de roulis.

Pour cela, on suppose le navire incliné à partir de sa position d'équilibre d'un angle θ (angle de gîte).

(L'axe de rotation est l'axe horizontal longitudinal OZ perpendiculaire au plan de la figure 2. Le point O est supposé fixe.)

Le volume immergé demeure alors le même (mouvements isocarènes).

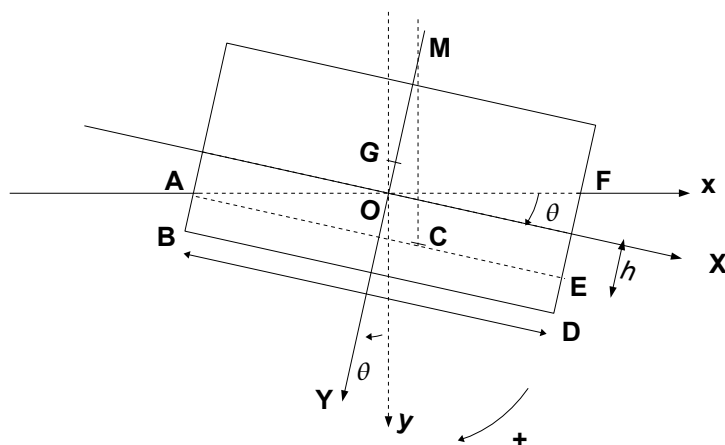


Figure 2

- a.** La position du nouveau centre de carène C coïncide avec le centre d'inertie du trapèze ABDF (juxtaposition du rectangle ABDE et du triangle AEF).

Montrer que les coordonnées du point C dans le repère XOY lié au navire sont :

$$X_c = \frac{l^2 \tan \theta}{12h} \quad \text{et} \quad Y_c = \frac{h}{2} - \frac{l^2 \tan^2 \theta}{24h}$$

- b.** Le support de la poussée d'Archimède coupe l'axe OY en un point appelé « métacentre ».

Exprimer $Y_M = \overline{OM}$.

Montrer que lorsque l'angle θ est faible, le point M peut être considéré comme fixe sur l'axe OY.

Exprimer alors le moment du couple de redressement.

Donner la condition sur la position relative du centre d'inertie G et du métacentre M pour que, lorsque l'angle $\theta=0$, l'équilibre soit stable vis à vis du roulis.

- c.** En déduire l'inégalité : $\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + \frac{l^2}{6H^2} > 0$

Cette inégalité est-elle vérifiée dans le cas étudié ici ?

- d.** Que peut-il se passer si, sur un navire, la cargaison est mal arrimée ?

- e.** On appelle J le moment d'inertie du navire par rapport à l'axe longitudinal OZ. Etudier le mouvement de roulis de faible amplitude qui se fait autour de l'axe OZ supposé fixe.

Montrer que plus un navire est stable et plus la période du roulis est faible.

Pendule simple dans un champ de pesanteur – (Extrait agrég. option chimie 1999)

On considère un pendule simple constitué d'un objet P, de masse m , suspendu en un point O par un fil tendu sans raideur et sans masse, de longueur l , dans le champ de pesanteur supposé uniforme ; le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

On note θ l'angle que fait le fil de suspension avec la verticale ; on étudie les mouvements dans le plan vertical de la figure 1.

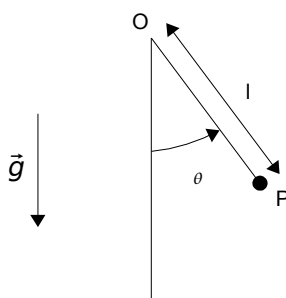


Figure 1

1. A quelle condition sur la durée de l'expérience le référentiel terrestre peut-il être considéré comme galiléen ?
2. Représenter les 2 forces appliquées au point P. Ces forces travaillent-elles lors d'un déplacement élémentaire du point P ?
3. A l'aide du principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement en précisant clairement la base de projection.
4. Retrouver cette équation différentielle à partir du théorème de l'énergie cinétique.
5. Etablir cette même équation différentielle en utilisant le théorème du moment cinétique.
6. A quelle condition le pendule ci-dessus sera-t-il un oscillateur harmonique ? Quelle est alors l'expression littérale de sa pulsation ω_0 ?
7. On se propose dans cette question d'étudier quelques effets non linéaires :
 - 7.a. Posant $\sin\theta = \theta - \theta^3/6$, que devient l'équation différentielle du mouvement ?
 - 7.b. On cherche, pour l'équation différentielle approchée écrite en 1.7.a une solution elle-même approchée de la forme :

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t + \varepsilon \theta_0 \cos 3\omega t$$

Quelle est, dans cette solution, la pulsation fondamentale ?

Quel est le premier harmonique après la pulsation fondamentale ?

- 7.c. On suppose $\varepsilon \ll 1$; en reportant la solution approchée dans l'équation

différentielle approchée, établir, en faisant les approximations convenables, l'expression de la pulsation ω en fonction de ω_0 et du premier terme correctif ; exprimer aussi ε en fonction de θ_0 .

8. On superpose la solution informatique $\theta(t)$ de l'équation différentielle exacte du pendule et la fonction $y = \theta_0 \cos \omega_0 t$.

8.a. La solution $\theta(t)$ est-elle harmonique ? Quelle est sa pulsation fondamentale ? Quelles pulsations harmoniques contient-elle ? Quelle serait l'allure du spectre de la solution $\theta(t)$ obtenu par analyse spectrale ?

8.b. D'après la question 1.7, la courbe $\theta(t)$ relative au mouvement réel du pendule est-elle celle qui a la plus grande période ou celle qui a la plus petite période ?

8.c. Qu'est ce qu'une trajectoire de phase ? Donner l'allure de la trajectoire de phase du pendule harmonique ; du pendule réel.

Mécanique de quelques sports ou jeux – (Extrait PEA 2002)

Dans toute cette partie de problème, le point O est l'origine d'un repère d'espace Oxyz orthogonal et direct du référentiel terrestre noté (R) de vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$. Les axes Ox et Oy sont horizontaux et l'axe Oz est vertical, orienté positivement vers le haut. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne.

1. JEU DE BALLES

1.1 PRÉLIMINAIRE : CHOC DE DEUX POINTS MATÉRIELS

On rappelle qu'un choc entre deux points matériels est une interaction brève et intense qui provoque une variation de leur vecteur vitesse sans modification de leur

position.

1.1.1 Répondre en trois lignes au maximum à chacun des points suivants :

- Donner la définition d'un référentiel galiléen.
- Citer un exemple d'un très bon référentiel galiléen.
- Donner la définition d'un référentiel géocentrique.
- Le référentiel géocentrique est-il galiléen ? Justifier la réponse.
- Définir un référentiel terrestre.
- A quelle condition un référentiel terrestre peut-il être considéré comme galiléen ?
- A quelle condition une balle de petites dimensions peut-elle être assimilable à un point matériel ?

1.1.2 Un point matériel M_1 de masse m_1 et de vitesse $\vec{v}_1$ dans un référentiel supposé galiléen (R) heurte un second point matériel M_2 de masse m_2 et de vitesse $\vec{v}_2$ dans le même référentiel. On note respectivement $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$ les vitesses des deux points matériels juste après le choc. On suppose le choc direct, les quatre vecteurs vitesses $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$ sont donc colinéaires.

Montrer qu'on peut considérer que la quantité de mouvement de l'ensemble des deux points matériels se conserve au cours du choc, même si le système des deux points n'est pas isolé. En déduire une première relation (1) entre les quatre vecteurs vitesses précédents.

1.1.3 On suppose élastique le choc entre M_1 et M_2 . En déduire une seconde relation (2) liant les quatre vecteurs vitesses considérés que l'on peut mettre sous la forme :

$$\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 = -(\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

1.1.4 Déterminer complètement les vitesses après le choc en fonction des vitesses avant le choc et des masses m_1 et m_2 .

1.1.5 Examiner les deux cas particuliers suivants et commenter les résultats :

- $\vec{v}_2 = \vec{0}$ et $m_1 = m_2$
- $\vec{v}_2 = \vec{0}$ et $m_1 \ll m_2$

1.2 CHOC DE BALLES CONTRE LE SOL

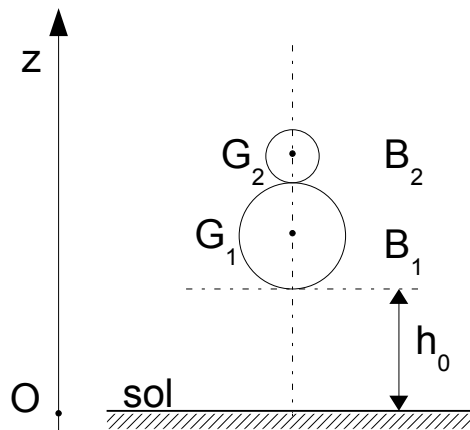
1.2.1 Dans le référentiel (R), on lâche avec une vitesse initiale nulle une balle B_1

sphérique et homogène d'une hauteur h_0 au dessus du sol. En négligeant les frottements, exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ du centre d'inertie G_1 de la balle quand elle frappe le sol.

En supposant élastique le choc contre le sol, exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}_1$ du centre d'inertie G_1 de la balle quand elle repart. En déduire la hauteur h_1 à laquelle elle remonte en fonction de h_0 .

1.2.2 On dispose de deux balles B_1 et B_2 de masses très inégales. La plus lourde, B_1 pourrait être, par exemple, une balle élastique pleine de masse m_1 voisine de 200g tandis que B_2 serait une balle de ping-pong de masse m_2 voisine de 3g ; l'expérience reste spectaculaire avec un ballon de basket de masse m_1 voisine de 600g et une balle de tennis de masse m_2 voisine de 50g. On considère donc que la masse m_1 est très grande devant la masse m_2 .

On lâche sans vitesse les deux balles accolées comme le suggère le schéma de la figure 9.



- Figure 1 -

A l'instant t_{0^-} , la grosse balle B_1 heurte le sol sans que la petite balle B_2 n'entre en contact avec elle. Exprimer, en fonction de g et h_0 , les vecteurs vitesses $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_1$ du centre d'inertie G_1 de la balle B_1 par rapport au référentiel (R) respectivement avant et après le choc contre le sol.

A l'instant ultérieur t_{0^+} infiniment voisin de l'instant t_{0^-} , la petite balle B_2 heurte la grosse balle B_1 supposée encore en contact avec le sol. Déterminer, par rapport au référentiel (R), le vecteur vitesse $\vec{v}_2$ du centre d'inertie G_2 de la petite balle B_2 avant le choc avec B_1 .

En utilisant le résultat de la question 1.1.4 déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}'_2$ par rapport au référentiel (R) du centre d'inertie G_2 de la balle B_2 juste après ce choc avec B_1 .

En déduire la hauteur h_2 à laquelle remonte la balle B_2 en fonction de sa hauteur de chute h_0 . Commenter le résultat obtenu.

2. MODELISATION SIMPLE D'UN PLONGEUR

On considère un plongeur passif dont les bras seraient initialement tendus et relevés selon la verticale et qui se laisserait tomber comme une planche rigide d'un plongoir horizontal, également rigide, en restant en contact par ses pieds avec le plongoir au début de son mouvement.

Dans tout le problème on néglige la résistance de l'air.

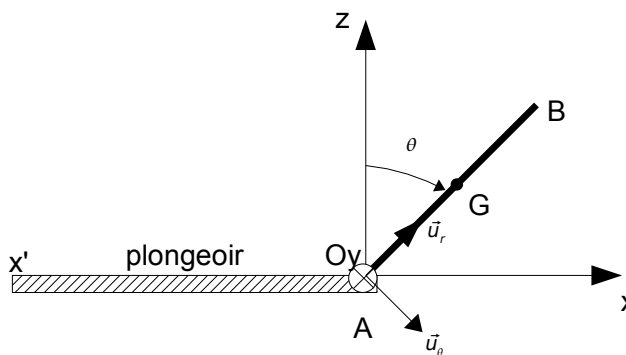
Ce plongeur est alors modélisé par une barre rigide homogène AB de masse m , de longueur $2l$ et de centre d'inertie G , en mouvement de rotation autour de l'axe horizontal Oy du plongoir, le point A en contact avec le plongoir au point O ne glissant pas sur le plongoir tant qu'il reste en contact avec lui.

Sa position instantanée est repérée par l'angle $\theta = (Az, AB)$ de la figure 2. A l'instant $t=0$, il est immobile et presque vertical : $\theta_0 = 0^+$.

On rappelle l'expression du moment d'inertie de la barre AB par rapport à l'axe

horizontal Gy perpendiculaire à la barre : $J_{Gy} = \frac{ml^2}{3}$.

Pour les applications numériques, on prendra pour longueur du plongeur, des pieds à l'extrémité des bras tendus : $2l = 2,0 \text{ m}$.



- Figure 2 -

2.1 Quelles sont les actions mécaniques s'exerçant sur le plongeur passif lors de son mouvement de rotation tant que ses pieds (extrémité A) reposent sur l'extrémité O du plongeur rigide horizontal x'O ? Représenter alors les différentes actions mécaniques sur un schéma clair.

Tant que l'extrémité A reste en contact avec le point O du plongeur donner l'expression des composantes normale a_n (selon AB de vecteur unitaire $\vec{u}_r$) et tangentielle a_t (selon la perpendiculaire directe à AB de vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$) de l'accélération $\vec{a}_G$ du centre d'inertie G de la barre dans le référentiel terrestre en fonction de l , θ et ses dérivées par rapport au temps t .

En considérant le référentiel terrestre d'étude (R) galiléen, appliquer le théorème de la résultante cinétique à la barre. En déduire les composantes normale R_n et tangentielle R_t de la force $\vec{R}$ exercée par le plongeur sur le plongeur en fonction de m , g , l , θ et ses dérivées par rapport au temps.

2.2 En appliquant le théorème de Huygens, donner l'expression du moment d'inertie J_{Ay} de la barre AB par rapport à l'axe de rotation Ay . Donner, en fonction de m , g , l , θ et ses dérivées par rapport au temps, les expressions de l'énergie cinétique dans (R) et de l'énergie potentielle de pesanteur du plongeur avant que ses pieds ne se détachent du plongeur. On prendra l'énergie potentielle nulle lorsque le plongeur est vertical ($\theta = 0$).

En utilisant une méthode énergétique, déterminer l'expression de la vitesse angulaire du plongeur $\dot{\theta}$ en fonction de θ et des données du modèle. En déduire l'expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du plongeur pendant sa phase d'appui en fonction de θ et des données du modèle.

2.3 A partir des résultats des questions précédentes, donner, tant qu'il y a contact en O, l'expression des composantes R_n et R_t en fonction de m , g et θ exclusivement. Justifier le sens trouvé pour chaque composante. En considérant que le plongeur perd contact avec le plongeur lorsque R_n s'annule, déterminer la valeur θ_1 de l'angle θ pour lequel le plongeur perd contact avec le plongeur. Critiquer la modélisation proposée lors de cette première phase du mouvement du plongeur.

2.4 Le contact du plongeur avec le plongeur cesse à l'instant t_1 . Déterminer alors la

vitesse angulaire du plongeur $\dot{\theta}_1$ en fonction de g et l , les coordonnées x_1 et z_1 de son centre d'inertie en fonction de l , ainsi que les composantes $\dot{x}_1$ et $\dot{z}_1$ du vecteur vitesse $\vec{v}_G$ de son centre d'inertie en fonction de g et l .

2.5 Faire le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur le plongeur dès que celui-ci a perdu contact avec le plongeur en négligeant toujours la résistance de l'air. Définir le référentiel barycentrique (R^*) du plongeur pendant son plongeon. Est-il galiléen ? Justifier la réponse.

Énoncer le théorème du moment cinétique barycentrique. En déduire que le mouvement de rotation du plongeur est uniforme pendant toute la durée du plongeon et donner l'expression de sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de g et l .

Lors d'un plongeon réel, le plongeur se ramasse en boule pendant le plongeon. Quelle conséquence peut-on déduire quant à la vitesse angulaire de rotation du plongeur dans ce cas ?

2.6 On revient au modèle proposé du plongeur supposé rigide pendant le plongeon. On considère une nouvelle origine de l'échelle des temps : à l'instant t' est repéré à partir du moment où le plongeur décolle du plongeur.

Déterminer les coordonnées x_G et z_G du centre d'inertie du plongeur pendant le plongeon en fonction de t' , g et l .

On admet que, lorsqu'il pénètre dans l'eau, le corps du plongeur, dont la tête est dirigée vers l'eau, est vertical. Préciser la valeur numérique θ_2 correspondante de l'angle θ . En admettant désormais que cette condition est réalisée, donner l'expression littérale de la durée $\Delta t'$ du plongeon en fonction de θ_1 , g et l et celle de la coordonnée z_{B_2} de l'extrémité de la main au moment où elle rentre en contact avec l'eau.

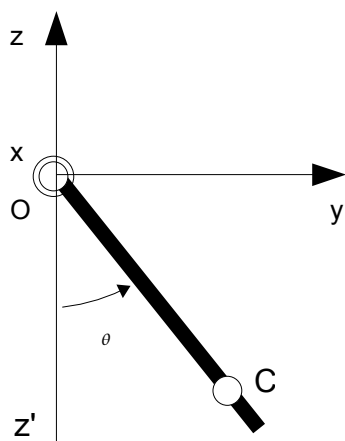
Application numérique : calculer $\Delta t'$ et z_{B_2} . Commenter le résultat obtenu.

3. MOUVEMENT D'UNE BALANÇOIRE

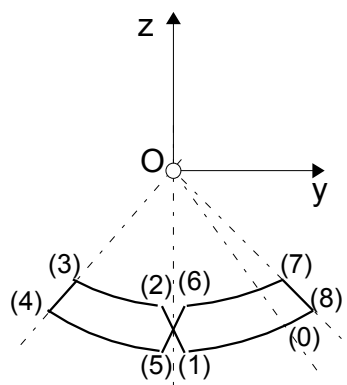
L'axe de rotation d'une balançoire occupée par un enfant est l'axe horizontal Ox , fixe par rapport au référentiel terrestre (R) supposé galiléen. Le système (S) comprend l'enfant et la partie mobile de la balançoire.

Pour simplifier, on le modélise par une tige sans masse sur laquelle se déplace un point matériel de masse m situé en un point C de la tige. L'élongation angulaire est repérée par $\theta = (Oz', OC)$ comme le montre la *figure 3*.

Au cours du mouvement, l'enfant se lève lorsqu'il passe par une position verticale et s'accroupit quand son élongation est extrême. En fonction des mouvements de l'enfant, le point C se situe donc soit à une distance l , soit à une distance L de l'axe de rotation, avec $l < L$. La trajectoire du point C est représentée sur le schéma de la *figure 4*. Les modifications de la distance OC entre l et L ou entre L et l sont supposées extrêmement rapides, c'est-à-dire que la longueur OC peut varier sans que θ ne varie.



- Figure 3 -



- Figure 4 -

1.

On considère, dans tout le problème, que l'on néglige la résistance de l'air.

3.1 Le système (S) est-il un solide ? Justifier la réponse. On suppose que la liaison pivot le long de l'axe Ox est parfaite. Préciser les actions mécaniques extérieures auxquelles le système (S) est soumis.

Quelle est l'expression littérale du moment cinétique σ_x par rapport à l'axe Ox du système (S) en fonction de m , l ou L et $\dot{\theta}$?

On choisit pour origine des énergies potentielles la position (1) pour laquelle $\theta=0$ et $OC = L$. Quelle est l'expression littérale de l'énergie mécanique du système (S) en fonction de m , g , l ou L , θ et $\dot{\theta}$? On rappelle que $\cos(2u) = 1 - 2 \sin^2 u$.

3.2 Initialement, le système (S) est immobile en position (0). L'élongation angulaire est

θ_0 , avec $\theta_0 > 0$. Montrer que l'énergie mécanique se conserve entre la position (0) et la position (1) pour laquelle $\theta_1 = 0$.

En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ en position (1) en fonction de θ_0 , g et des caractéristiques (I ou L) du système.

3.3 Montrer que le moment cinétique par rapport à l'axe Ox se conserve entre les positions (1) et (2). En déduire $\dot{\theta}_2$ en fonction de $\dot{\theta}_1$ puis en fonction de θ_0 , g et des caractéristiques I et L du système.

3.4 Exprimer littéralement $\dot{\theta}_3$ et θ_3 (ou une ligne trigonométrique liée à θ_3) en fonction de θ_0 et des caractéristiques du système.

Quelles sont les valeurs de $\dot{\theta}_4$ et θ_4 ?

3.5 Calculer $\dot{\theta}_5$ en fonction de $\dot{\theta}_4$ puis en fonction de θ_0 , g et des caractéristiques du système.

Des réponses précédentes, déduire $\dot{\theta}_6$ puis en fonction de θ_0 , g et des caractéristiques du système.

3.6 Par une méthode analogue, exprimer $\dot{\theta}_7$ ou θ_8 en fonction de θ_0 et des caractéristiques du système. Comparer θ_8 à θ_0 et commenter le résultat.

Le système (S) est qualifié d'oscillateur paramétrique. Justifier cette expression. Quel est le phénomène physique à l'origine de l'augmentation de l'énergie mécanique du système ?

3.7 Dans le plan de phase (θ en abscisses et $\dot{\theta}$ en ordonnées) quelle est l'équation de la trajectoire de phase entre le point (0) et le point (1) ? Représenter l'allure de cette courbe dans le plan de phase. Représenter la trajectoire de phase entre le point (1) et le point (2). Quelle est l'équation de la trajectoire de phase entre le point (2) et le point (3) ? Représenter l'allure de cette courbe dans le plan de phase.

Achever la construction de la trajectoire de phase. Commenter le résultat.

Extrait agrégation externe option chimie

Préliminaires.

A. 1. A et B étant deux points fixes d'un solide (S) en mouvement par rapport au référentiel (R) supposé galiléen, quelle relation lie les vitesses $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$ du solide ?

2. On désigne par $\vec{\sigma}_K$ le moment cinétique de (S) en un point K de (R).

a. Comment se calcule, dans le cas général, $\vec{\sigma}_K$?

b. Calculer $\left(\frac{d\vec{\sigma}_K}{dt}\right)_R$ si K est fixe dans (R) et $\left(\frac{d\vec{\sigma}_{K'}}{dt}\right)_R$ si K' est mobile.

3. Rappeler les énoncés des théorèmes de la Dynamique, dans (R).

B. On considère un solide homogène cylindrique, de hauteur h , de rayon R , de masse M . On note G son centre de masse, et Gz l'axe de révolution.

On définit le repère orthonormé Gxyz de vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$.

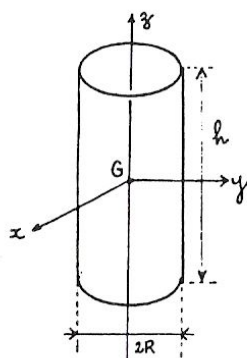
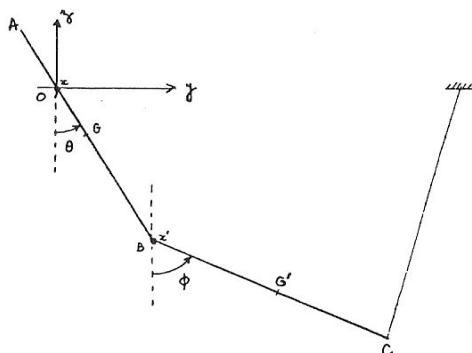


Figure 1

1. Calculer les moments d'inertie J , J_1 , J_2 du cylindre par rapport aux axes Gz, Gx et Gy.
2. Calculer le moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ parallèle à Gx, tel que $\overline{GH} = a \cdot \vec{u}_z$ le point H étant l'intersection de (Δ) de Gz.
3. Comment se transforment les résultats précédents si $R \ll h$?

C. Étude statique.

On envisage le solide ABC, formé de deux tiges identiques (AB) et (BC) de masses M, de hauteurs h , de rayons $R \ll h$. On note G et G' les centres de masse de (AB) et (BC).



- ✓ (AB) est mobile autour de l'axe horizontal Ox , sans frottement, tel que $GO = a = \frac{h}{3}$. Sa position est repérée par l'angle orienté $\theta = (\vec{u}_z, \vec{BA})$.
- ✓ (BC) est mobile sans frottement autour de l'axe Bx' parallèle à Ox . Sa position est repérée par l'angle orienté $\phi = (\vec{u}_z, \vec{CB})$.
- ✓ Un fil de masse négligeable lié au point C maintient (BC) en position d'équilibre horizontal.

Dans cette position : $\theta = 70^\circ$.

Calculer la tension $\vec{T}$ que crée le fil sur le point C, ainsi que les réactions $\vec{R}_O$ et $\vec{R}_B$ des liaisons en O sur (AB), et en B sur (BC).

On notera respectivement α , γ , β les inclinaisons de ces différentes forces avec la verticale ascendante Oz .

On donne $Mg = 50 \text{ N}$.

D. Étude dynamique.

L'équilibre étant ainsi réalisé, on brûle le fil retenant C, à l'instant $t = 0$.

1. On note toujours $\vec{R}_O$ et $\vec{R}_B$ les différentes forces de liaison précédemment définies, ainsi que γ et β leurs inclinaisons avec la verticale Oz . Écrire le théorème du centre d'inertie, dans le référentiel (R), concernant (AB), puis (BC). En déduire quatre équations algébriques.
2. En se plaçant dans les référentiels du centre de masse de (AB) et (BC), notés respectivement R_{AB}^* et R_{BC}^* , écrire les théorèmes du moment cinétique au point G, puis au point G'. En déduire deux nouvelles équations algébriques.

3. Simplifier le système des six équations obtenues précédemment, en se plaçant au début du mouvement, à l'instant $t = 0^+$.

4. Application numérique : $h = 1 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Calculer $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$, β , $R_B = \|\vec{R}_B\|$, γ , $R_O = \|\vec{R}_O\|$ à l'instant $t = 0^+$.

E. Étude des petites oscillations.

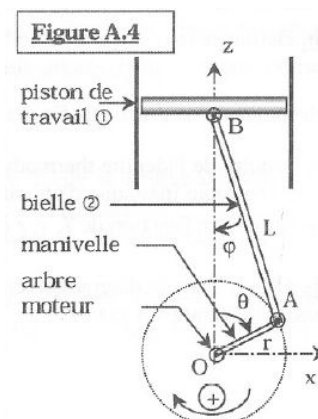
On immobilise le système $(S) = [(AB) + (BC)]$ dans sa position d'équilibre stable (A, B, C sont sur Oz , $Z_A > Z_B > Z_C$). On écarte (S) de cette position, et on l'abandonne ; $\theta(t)$ et $\phi(t)$ désignent les écarts angulaires de (AB) et (BC) par rapport à Oz (cf. question C).

1. Exprimer les énergies potentielle E_p et cinétique E_c du système (S) dans (R) , en fonction de $\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ et des caractéristiques de (AB) et (BC) .
2. Écrire le Lagrangien $L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = E_c - E_p$.

Étude cinématique du système bielle-manivelle - (Extrait capes 2003)

La transformation du mouvement rectiligne du piston de travail en un mouvement de rotation de l'arbre moteur est assuré par un embiellage comportant (figure A.4) :

- le piston de travail ① pouvant glisser sans frottement à l'intérieur du cylindre. Le point B du piston est astreint à se déplacer suivant l'axe Oz . On note $OB = z$. On confondra la surface du piston et la section S du cylindre.
- une barre AB appelée bielle ②, de longueur L . Les liaisons pivot en A et B sont supposées parfaites.
- un vilebrequin modélisé par une barre AO , ou manivelle ③, de longueur $OA = r$, en liaison pivot parfaite en O sur l'axe de l'arbre moteur.



L'étude est menée dans le repère trièdre direct $(0, x, y, z)$ lié au référentiel R_0 du bâti du moteur, supposé galiléen.

La manivelle est repérée par l'angle θ , le sens positif choisi étant celui de θ croissant.

On fixe l'instant $t = 0$ tel que $\theta = 0$.

L'arbre moteur tourne à la vitesse angulaire ω constante de 380 tours/min.

On rappelle que pour α réel et $|\varepsilon| \ll 1$, $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ à des termes en ε^2 près.

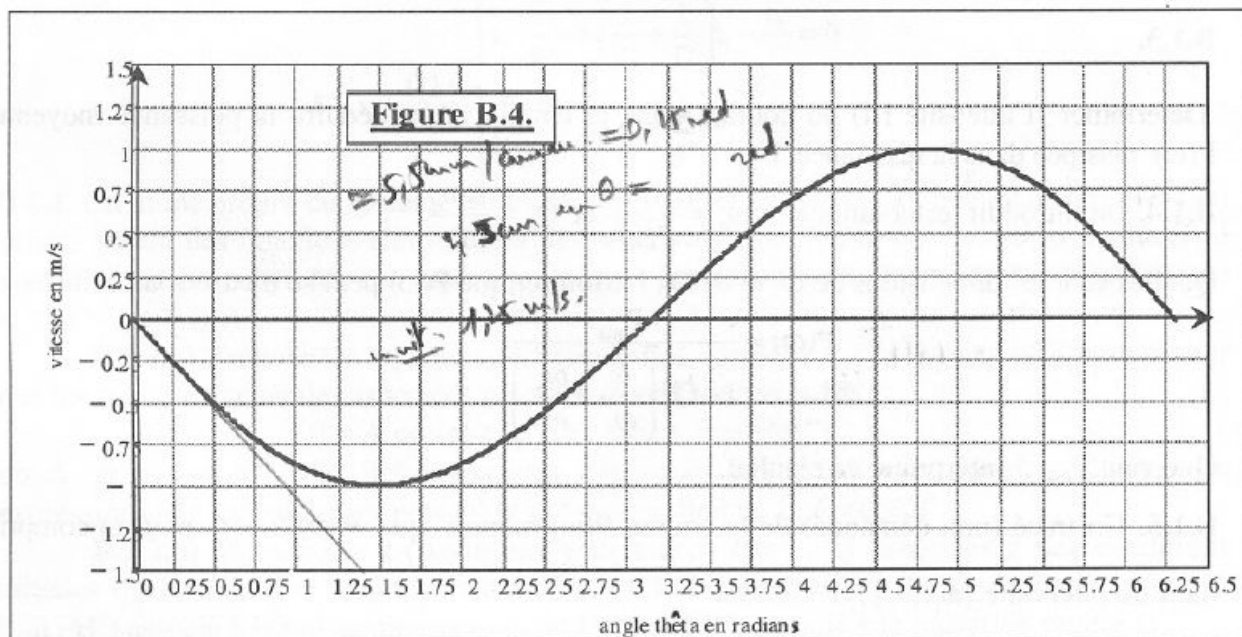
1. Trouver la relation liant r , L , $\sin(\theta)$ et $\sin(\varphi)$. En déduire l'expression de $z(t)$ en fonction de r , L et θ seulement.

2. Le rapport r/L vaut environ 1/10. Montrer que la vitesse v_p du piston est de la forme:

$$v_p \approx A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(2\omega t).$$

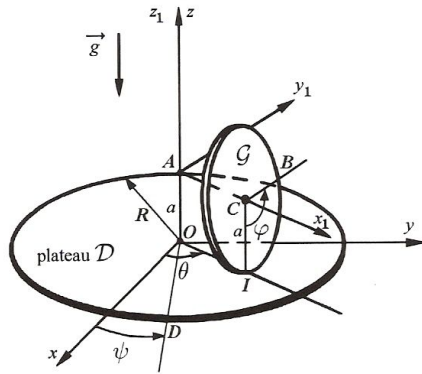
On exprimera A_1 et A_2 en fonction de L , r et ω .

3. La figure B.4 montre les variations de la vitesse en fonction de l'angle θ , pour θ compris entre 0 et 2π . Déduire du graphe $v(\theta)$ l'accélération maximale du piston en valeur absolue et commenter la valeur obtenue. Quelles précautions convient-il de prendre pour la réalisation du système bielle – manivelle ?



Mouvements couplés d'un plateau et d'un galet

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est considéré comme galiléen (inertiel) ; il est rapporté au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et il y règne un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.



Un disque homogène de masse m , de centre C et de rayon a est soudé à une tige rigide AC de longueur a et de masse négligeable disposée selon son axe de symétrie de révolution. Cette tige le relie au point A fixe dans $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{e}_z$. On désignera par $\mathcal{G}$ le solide constitué par le disque et la tige.

L'articulation en A est *a priori* sphérique, ce qui permet au système $\mathcal{G}$ d'effectuer des rotations quelconques autour du point A .

$\mathcal{G}$ peut être mis en contact ponctuel en I avec un second disque D (le plateau), de masse $M = 4m$, de centre O et de rayon $R = 2a$. Le plateau est soumis à une liaison qui l'astreint à tourner autour de l'axe fixe $(O, \vec{e}_z)$ qui coïncide avec son axe de symétrie de révolution.

On notera $\mathbb{R}_1$ le référentiel rapporté au repère orthonormé direct $(A, \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1}, \vec{e}_{z1})$, tel que $\vec{e}_{x1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et que $\vec{e}_{x1}, \vec{e}_{z1}$ et $\vec{e}_z$ sont coplanaires.

On définit les angles $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OI})$, $\phi = (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CB})$, $\psi = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OD})$, où D est un point de la périphérie de $\mathcal{D}$ et lié à $\mathcal{D}$ tandis que B est un point de la périphérie de $\mathcal{G}$ et lié à $\mathcal{G}$.

I - Etude préliminaire

Avertissement: Cette partie préliminaire ne constitue pas l'essentiel du problème, mais doit être traitée avec le plus grand soin, car sa résolution permet au candidat de comprendre le fonctionnement du système, et les résultats qui y sont établis sont utilisés de façon intensive dans la suite du problème.

1. Cinématique

1.1. Représenter les points O, A, C, I sur un schéma dans le plan $(A, \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{z1})$. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_{z1}$ si le contact $\mathcal{G} - \mathcal{D}$ est effectif au point I .

On suppose cette condition satisfaite dans toute la suite.

1.2. Exprimer en fonction des angles θ, φ, ψ et de leurs dérivées par rapport au temps $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ les composantes sur des vecteurs de base appropriés, *et clairement précisés*:

- de la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(\mathcal{D}/\mathbb{R})$ de rotation du plateau par rapport au référentiel terrestre $\mathbb{R}$;
- de la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(\mathbb{R}_1/\mathbb{R})$ du référentiel $\mathbb{R}_1$ par rapport à $\mathbb{R}$;
- de la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(\mathcal{G}/\mathbb{R}_1)$ du galet par rapport au référentiel $\mathbb{R}_1$
- de la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(\mathcal{G}/\mathbb{R})$ du galet par rapport à $\mathbb{R}$.

1.3. En déduire les expressions:

- de la vitesse $\vec{v}(I \in \mathcal{D}/\mathbb{R})$ du point I lié au plateau par rapport à $\mathbb{R}$;
- de la vitesse $\vec{v}(I \in \mathcal{G}/\mathbb{R})$ du point I lié au galet par rapport à $\mathbb{R}$.

1.4. Définir et exprimer la vitesse $\vec{u}$ de glissement du galet par rapport au plateau.

2. Géométrie des masses

Les disques $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ sont homogènes et leur épaisseur peut être négligée.

2.1. Déterminer le moment d'inertie I_1 de $\mathcal{G}$ par rapport à son axe de symétrie de révolution et son moment d'inertie J_1 par rapport à un diamètre.

2.2. Déterminer le moment d'inertie I_0 de $\mathcal{D}$ par rapport à son axe de symétrie de révolution.

3. Éléments cinétiques

3.1. Déterminer les résultantes cinétiques (quantités de mouvements totales) des solides $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ par rapport au référentiel terrestre.

3.2. Déterminer les moments cinétiques en leurs centres de masse respectifs des solides $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ par rapport au référentiel terrestre.

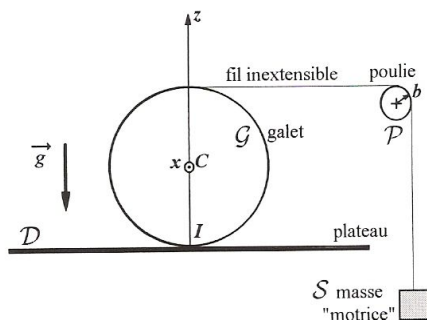
3.3. Déterminer le moment cinétique en A du solide $\mathcal{G}$ dans le référentiel terrestre.

3.4. Déterminer les énergies cinétiques des solides $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ par rapport au référentiel terrestre.

II. Plateau mis en mouvement par le galet

Dans cette partie, on se propose d'étudier un exemple pour lequel le galet met le plateau en mouvement, alors que l'on envisagera au contraire un exemple de mise en mouvement du galet par le plateau dans la partie III.

Dans toute la partie II, la liaison en A est modifiée, de sorte que $\mathcal{G}$ est astreint à tourner autour de l'axe $(C, \vec{e}_x)$. Le vecteur $\vec{e}_{x1}$ est donc confondu avec $\vec{e}_x$. Ceci revient à dire que l'angle θ reste nul.



Le galet est mis en mouvement par la chute d'un solide S de masse m ; ce mouvement est transmis par un fil de masse négligeable, guidé par une poulie P de rayon $b = a/5$, pouvant tourner sans frottement autour de son axe de symétrie de révolution, et dont le moment d'inertie par rapport à son axe de rotation est égal à celui du galet, soit I_1 .

Le mouvement du plateau est un mouvement de rotation autour son axe de symétrie de révolution, la liaison à l'axe du plateau étant également sans frottement. En revanche, le contact $\mathcal{D} - \mathcal{G}$ est caractérisé par un coefficient de frottement suffisant pour qu'il n'y ait pas de glissement relatif des deux solides.

1. Complément d'étude cinématique

1.1. Montrer que la condition de roulement sans glissement impose une relation simple entre les vitesses angulaires de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$.

1.2. On suppose que le fil est inextensible et qu'il ne glisse ni sur le galet, ni sur la poulie.

Montrer que, dans ces conditions, la vitesse angulaire de la poulie et la vitesse de S peuvent s'exprimer en fonction de la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ du galet.

2. Energie cinétique

2.1. Rappeler l'expression générale de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

2.2. Exprimer en fonction des données m , a et de $\vec{\Omega}$ l'énergie cinétique du système entier ε composé de la poulie P , du plateau $\mathcal{D}$, du galet $\mathcal{G}$ et de S .

3. Puissance des efforts

3.1. Déterminer la puissance des efforts intérieurs au système ε .

3.2. Quels sont les efforts extérieurs exercés sur ε qui travaillent ? Dérivent-ils d'une énergie potentielle ?

4. Loi horaire du mouvement

4.1. Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant un théorème de Dynamique approprié que l'on énoncera clairement.

4.2. Le système étant initialement dans l'état défini par $(\varphi=0 ; \dot{\varphi}=0)$, intégrer l'équation différentielle du mouvement.

III. Galet mis en mouvement par le plateau

On supprime le fil et la poulie de la partie II, et on rétablit la liaison sphérique en A de $\mathcal{G}$. Le mouvement du plateau est maintenu, grâce à un moteur régulé, à une vitesse de rotation constante $\vec{\Omega}(\mathcal{D}/\mathbb{R}) = \omega \vec{e}_z$. Le solide $\mathcal{G}$ est amené à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale, au contact du plateau. Cette mise en contact s'effectue sans discontinuité de vitesse, donc sans choc.

1. Phase de roulement avec glissement

1.1. Déterminer la vitesse de glissement $\vec{u}_o$ de $\mathcal{G}$ par rapport à P à l'instant $t = 0$.

1.2. Énoncer les lois de Coulomb relatives au frottement de glissement. Les frottements de pivotement et de roulement au point I seront négligés dans la suite. On notera f le coefficient de frottement au point I entre les solides $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$.

1.3. Etablir la liste des efforts s'exerçant sur le solide $\mathcal{G}$. On notera respectivement $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la force de contact exercée par $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{G}$.

1.4. Préciser la somme $\vec{F}$ et le moment $\vec{M}_A$ en A des efforts s'exerçant sur le solide $\mathcal{G}$. En appliquant judicieusement le théorème du moment cinétique, montrer que, tant que $\vec{u} \neq \vec{0}$, la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ est régie par l'équation différentielle :

$$\ddot{\varphi} + \frac{5}{2f} \dot{\varphi} = \frac{5g}{a}.$$

1.5. Pour déterminer le mouvement, on pourra procéder de la façon suivante:

- Montrer que $\dot{\varphi}^2 \leq \frac{5g}{a}$. En déduire que l'on peut poser $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{5g}{a}} \operatorname{th} \xi$.

- Etablir et intégrer l'équation différentielle dont ξ est solution.

- En déduire les lois horaires $t \rightarrow \varphi(t)$ et $t \rightarrow \theta(t)$; on pourra poser $\tau = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{5a}{g}}$.

1.6. En déduire les forces de contact en I et en A dans ces conditions.

2. Eventualité d'une phase de roulement sans glissement

2.1. Montrer que, pour ω convenablement choisi, la vitesse de glissement $\vec{u}$ du galet par rapport au plateau s'annule à un instant t_0 que l'on déterminera.

2.2. Quel est le mouvement ultérieur du galet?

Extrait Capes interne 2000

PARTIE A

A.I On considère deux points A et B définissant une droite horizontale. Deux ressorts identiques de constante de raideur k , de longueur à vide l_0 et de masse considérée nulle, sont attachés à A et B ; leurs extrémités libres sont reliées en un point C. Une masse M est accrochée au point C, de sorte que l'angle θ défini par chaque ressort et l'horizontale soit de 25° (fig. 1).

Données : $AB = d = 1,70 \text{ m}$; $l_0 = 80 \text{ cm}$; $M = 20 \text{ kg}$; accélération de la pesanteur à une altitude nulle $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

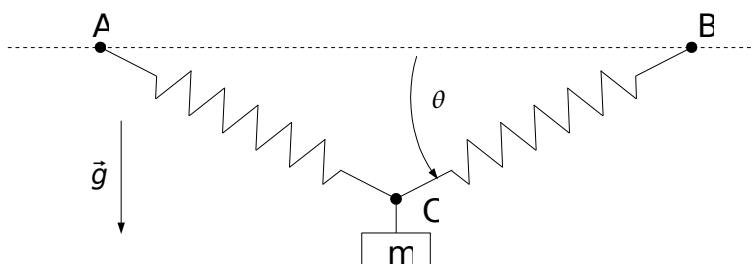


Figure 1

A.I.1. La constante de raideur d'une corde inextensible est-elle nulle ou infinie ? Justifier.

A.I.2. Rappeler et démontrer l'expression de l'énergie potentielle d'un ressort.

A.I.3. L'énergie d'un ressort est-elle extensive ?

A.I.4. Déterminer la constante de raideur k des ressorts.

Pour toute la suite du problème, on prendra $k=2\,000\text{ N.m}^{-1}$.

A.II Le système précédent décrit peut schématiser (grossièrement) un arc, la masse M représentant l'action de l'archer sur la corde (fig.2). L'arc est utilisé pour propulser parfaitement verticalement une flèche de masse $m=25\text{ g}$. La flèche est posée en C et l'angle initial imposé par l'archer entre AB et BC est de 25° . On négligera la variation de l'accélération de la pesanteur avec l'altitude et on la prendra égale à $g_0=9,81\text{ m.s}^{-2}$.

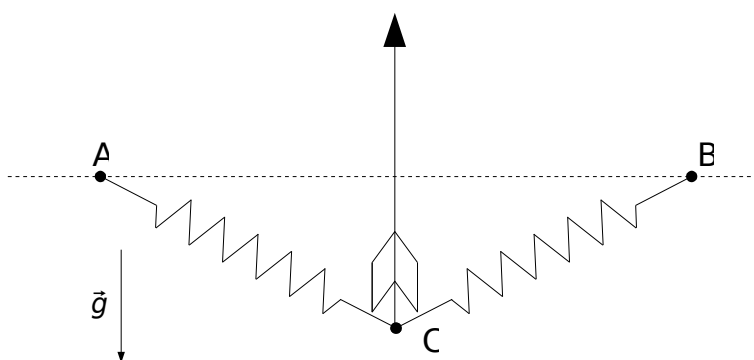


Figure 2

A.II.1. Déterminer la valeur v_0 de la flèche. On considérera que la flèche quitte la corde lorsque le point C passe sur la droite AB.

A.II.2. Dans cette question, on supposera tout frottement négligeable.

A.II.2.1. Déterminer l'altitude maximale, h_0 atteinte par la flèche. On prendra une altitude nulle pour l'horizontale (AB).

A.II.2.2. Avec quelle précision relative peut-on supposer que l'accélération de la pesanteur est uniforme et de valeur g_0 ? On donne le rayon de la terre : $R_T = 6\,400\text{ km}$.

A.II.3. Dans cette question, on suppose que la flèche est soumise à des frottements fluides du type $-\lambda \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la flèche. On appellera « z » l'altitude de la flèche à l'instant t , sachant qu'initialement celle-ci est nulle.

A.II.3.1. L'altitude de la flèche est mesurée grâce à un système de visée stéréoscopique. Proposez-en un schéma simple.

A.II.3.2. Déterminer la vitesse de la flèche en fonction du temps. On introduira une grandeur $\tau = m/\lambda$.

A.II.3.3. Montrer qu'à la retombée, la flèche ne peut dépasser une vitesse limite v_{lim}

A.II.3.4. Exprimer l'altitude z de la flèche en fonction du temps et de τ, v_o et v_{lim} .

A.II.3.5. La valeur de v_{lim} est 34 m.s^{-1} . Déterminer l'altitude maximale, notée h_m , atteinte par la flèche ainsi que la valeur de λ .

A.II.3.6. Montrer que le travail fourni par la force de frottement, W_λ est négatif. Qu'advient-il de cette grandeur énergétique ?

A.II.3.7. En effectuant le bilan énergétique sur un système que l'on définira clairement, déterminer le travail fourni par la force de frottement au cours de la phase ascensionnelle en fonction de g_o, v_o et h_m .

A.III. Pour simuler le plus simplement possible que la corde est massive, on considère maintenant que le point C est massif ; on prendra cette masse m_c , égale à 10g. Après le départ de la flèche, la masse m_c oscille donc au voisinage du point O, milieu du segment [AB]. Cette oscillation est orthogonale à la droite (AB) et sera repérée par la coordonnée z_c , (fig. 3). On supposera le déplacement de m_c , au voisinage de O, très faible devant d . On supposera également l'accélération de la pesanteur négligeable devant l'accélération de la masse m_c , et on négligera tout frottement. On rappelle que la valeur de k est $2\,000 \text{ N.m}^{-1}$.

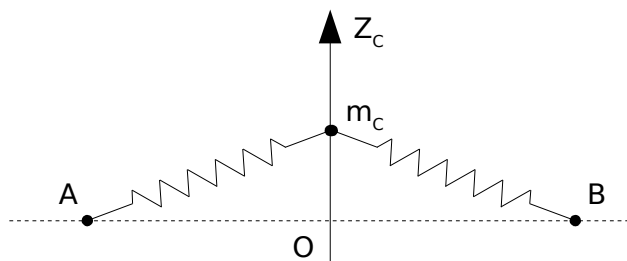


Figure 3

A.III.1. Déterminer l'équation différentielle linéaire vérifiée par z_c .

A.III.2. A quelle condition, sur k , l'accélération de la pesanteur est-elle effectivement négligeable ? Montrer que pour les valeurs numériques proposées, cette condition est vérifiée.

A.III.3. Montrer que le mouvement de z_c est sinusoïdal de pulsation ω_o , que l'on exprimera en fonction de m_c, k, l_o et d .

A.III.4. Cette oscillation mécanique est accompagnée d'une vibration acoustique de même pulsation.

A.III.4.1. Cette vibration est-elle audible ? Commenter.

A.III.4.2. L'émission de cette vibration peut-elle expliquer un amortissement du mouvement de C ?

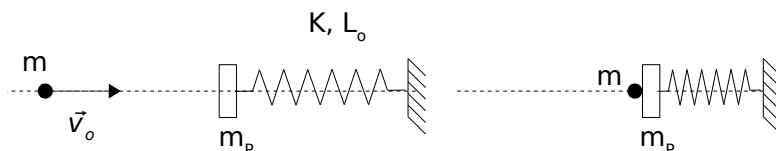
A.III.4.3. En supposant cette vibration émise de manière isotrope, justifier simplement que son intensité décroît comme l'inverse du carré de la distance au point O.

PARTIE B

Mesure de la vitesse de départ de la flèche.

B.1. Méthode balistique

B.1.1. Cette méthode consiste à placer à quelque mètre de l'arc un bloc de plomb de masse $m_p=100\text{ g}$ accroché à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur K et de longueur à vide L_0 . La vitesse de la flèche et l'axe du ressort sont horizontaux. La flèche se plante dans le bloc de plomb qui peut alors coulisser sans frottement et provoquer ainsi une variation de longueur ΔL du ressort. La variation de longueur ΔL du ressort est déterminée grâce à la trace d'un stylet solidaire d'un bloc m_p . On suppose que la distance entre l'arc et le bloc de plomb est suffisamment faible pour considérer que la vitesse de la flèche, notée $\vec{v}_0$, reste uniforme avant le choc avec le bloc de plomb. On pourra assimiler la flèche à une masse ponctuelle de masse $m=25\text{ g}$.



B.1.1.1. Quelles sont les grandeurs physiques conservées au cours d'un choc élastique ?

B.1.1.2. Quelles sont les grandeurs physiques conservées au cours d'un choc inélastique ?

B.1.1.3. Le choc entre la flèche et le bloc de plomb est-il élastique ou inélastique ?

B.1.2. Déterminer la vitesse de l'ensemble « $m+m_p$ » juste après le choc en fonction de v_0 , m et m_p .

B.1.3. Déterminer v_0 en fonction de ΔL . *Application numérique* : $K = 1\,050\text{ N.m}^{-1}$, $\Delta L = 12\text{ cm}$.

B.1.4. Effectuer un bilan énergétique de cette expérience et le commenter, notamment en termes de transformation d'énergie. On appellera C la capacité thermique totale du bloc de plomb.

Oscillateurs - (Extrait du capes interne section physique et application 2004)

Cette partie traite de l'application des théorèmes généraux dans des référentiels galiléens ou non galiléens.

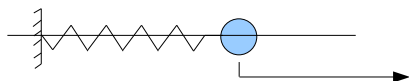
Les vecteurs sont notés en caractères gras.

Dans la totalité du problème les liaisons sont sans frottement.

Les trois parties A, B, C sont totalement indépendantes.

Partie A : oscillateurs étudiés dans un référentiel galiléen.

I.A.1.



Sur la figure fixe ci-dessus, le ressort, de masse nulle, est dessiné au repos. Sa raideur est notée k .

La force de rappel appliquée par le ressort à la masse m est égale au produit : raideur $\times$ élongation du ressort(x).

Dans cette question, on admet que les effets de la gravité sont totalement compensés ce qui, dans les équations, revient à considérer celle-ci comme nulle.

A l'instant $t=0$, l'opérateur écarte la masse de sa position de repos en imposant au ressort une élongation $x=a$, et il abandonne celle-ci sans vitesse initiale.

La masse m subit alors un mouvement de translation, sans frottement, selon Ox .

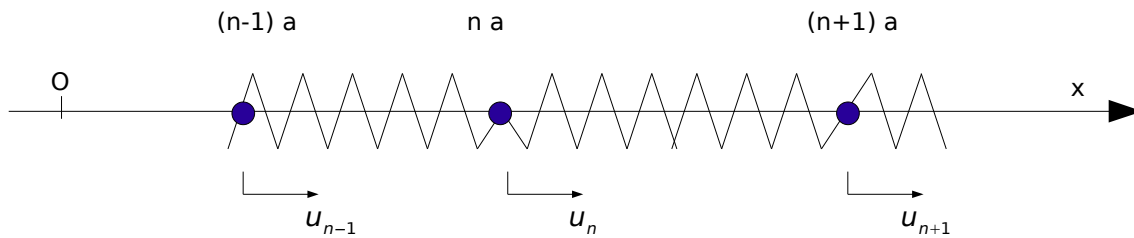
Exprimez $x(t)$ pour $t>0$.

I.A.2. On considère le système *ressort + masse* qui, pour $t>0$, n'est soumis qu'à des actions intérieures au système. Calculez la puissance de ces actions intérieures $P_{int}(t)$ en fonction des paramètres du système (on pourra, pour cela, au besoin, utiliser le théorème de l'énergie cinétique).

I.A.3. Calculez la valeur moyenne temporelle de P_{int} . Commentez ce résultat.

I.A.4. On considère une chaîne infinie d'oscillateurs élastiques, tous identiques, composée de ressorts de masse négligeable de raideur k et de masses ponctuelles de valeur m . La longueur des ressorts au repos est a . Les masses peuvent coulisser selon la direction de la chaîne, dessinée ci-dessous au repos.

N est un entier relatif.



Les points $\bullet$ désignent les masses ponctuelles, qui, dans la position de repos, sont régulièrement espacées.

Les grandeurs algébriques u_{n-1}, u_n, u_{n+1} représentent respectivement les déplacements longitudinaux des masses par rapport à leurs positions repos.

Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour la $n^{\text{ième}}$ masse.

I.A.5. On écrit $u_n = u(x=na, t) = u(x, t)$. De ce fait $u_{n-1} = u(x-na, t)$ et $u_{n+1} = u(x+na, t)$.

On utilise l'approximation dite des milieux continus, en considérant que la distance a est « petite », c'est-à-dire que l'on exprime u_{n-1} et u_{n+1} en effectuant un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de $x=na$.

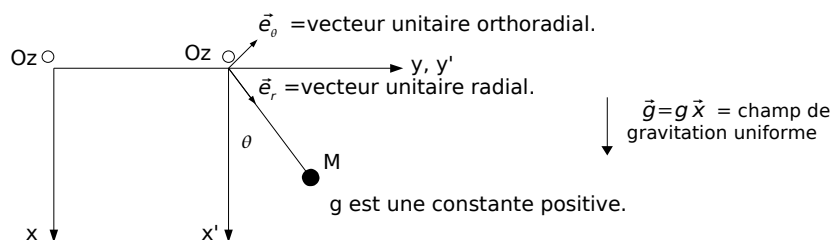
Etablir l'équation aux dérivées partielles, appelée équation de D'Alembert, vérifiée par $u(x, t)$.

En déduire la célérité d'une onde progressive se propageant selon Ox .

Partie B : pendule simple étudié dans un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen.

$R = Oxyz$ est un référentiel galiléen ; $R' = O'x'y'z'$ est un référentiel en translation rectiligne par rapport à R . Un vibreur fait subir à O' une translation selon Oy , de telle façon que $\overline{OO'} = a \cos(\omega t)$.

Les axes Oy et $O'y'$ coïncident.



x = vecteur unitaire selon Ox , y = vecteur unitaire selon Oy , z = vecteur unitaire selon Oz .

Une tige rigide $O'M$, sans masse, de longueur l , tourne sans frottement autour de l'axe $O'z'$. Au point M est accrochée une masse ponctuelle m . L'ensemble est immergé dans un champ de gravitation uniforme $\vec{g}$.

L'angle $\theta(t)$ que fait le pendule avec la verticale est quelconque ; t désigne le temps.

Dans les réponses aux questions suivantes apparaîtront $\theta(t)$ et ses dérivées par rapport au temps.

I.B.1. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}$ du point M , dans le référentiel R' , en l'exprimant dans la base de projection liée à $O'M$: $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z = \vec{z} = \vec{z}'$.

I.B.2. Déterminer ensuite l'accélération $\vec{a}$ du point M , dans le référentiel R' , exprimée dans la même base de projection que celle de la question précédente.

I.B.3. Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R' pour le système TM : tige + masse. En déduire la force de liaison $\vec{L}$ que l'axe $O'z'$ exerce sur la système TM au point O' en l'exprimant dans la base x, y, z , c'est-à-dire en déterminant les grandeurs L_x, L_y et L_z telles que $\vec{L} = \vec{x}L_x + \vec{y}L_y + \vec{z}L_z$.

I.B.4. Enoncer, dans le cas général, le théorème du moment cinétique par rapport à un point O' , fixe dans un référentiel non galiléen. On se limitera au cas du solide parfait.

Ecrire ce théorème, dans le cas présent, pour le système tige+masse, relativement au point O' qui est fixe dans le référentiel R' .

En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$.

I.B.5. Déduire du résultat précédent, l'équation différentielle à laquelle satisfait $\theta(t)$ dans le

cas simple où O' est fixe par rapport au référentiel galiléen R (absence de vibreur).
Retrouver ce résultat par des considérations énergétiques.

Partie C : théorèmes généraux dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen.

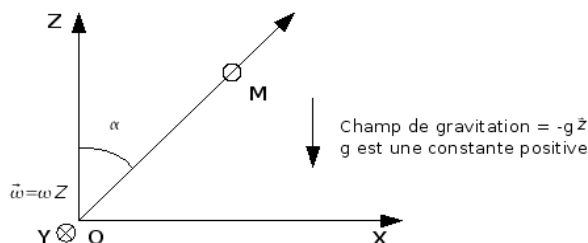
I.C.1. Soit un solide parfait (rotor), immergé dans un champ de gravitation uniforme et tournant autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Quand dit-on que ce rotor est équilibré statiquement ?

Quand dit-on que le rotor est équilibré dynamiquement ?

Si ces deux conditions ne sont pas réalisées, quelles sont les conséquences dommageables pour la machine tournante ?

I.C.2. Lorsque la vitesse angulaire ω du rotor d'un moteur asynchrone est comprise entre 0 et ω_s , la courbe (caractéristique mécanique) donnant le couple moteur en fonction de ω , pour ce moteur asynchrone, présente une partie à pente négative. On admet que le moteur est accouplé à une charge présentant un couple résistant constant. Pourquoi la partie à pente négative de la caractéristique mécanique est-elle appelée partie utile ?

I.C.3. Une masse ponctuelle M , en forme d'anneau, coulisse sans frottement sur une tige Ox de masse nulle.



La tige Ox effectue un mouvement de rotation autour de la verticale OZ considérée comme fixe par rapport à un référentiel galiléen.

L'angle α de la figure ci-dessus est fixe. Le repère $OXYZ$ tourne à vitesse angulaire constante ω autour de OZ .

L'axe Ox appartient au plan OX, OZ .

Déterminez x_e la position d'équilibre de M , par rapport à la tige Ox , en fonction de g , α et ω .

I.C.4. A l'instant $t=0$, la masse M est abandonnée sans vitesse initiale relativement à Ox , à l'abscisse $x = x_e + a$. Déterminez $x(t)$ en fonction de x_e , t , a , ω et α .

I.C.5. En déduire la puissance $P(t)$ développée par le moteur qui fait tourner la tige Ox.

Etude des chocs - Extrait du Capes externe 1990

A. Choc de deux solides

On dispose d'une table plane et horizontale sur laquelle sont placés deux solides A et B, de masses respectives m_A et m_B . Cette table, fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, est percée de multiples trous permettant à une soufflerie d'envoyer des jets d'air. Les frottements seront ainsi négligés. Le solide B est initialement immobile et le solide A vient le heurter avec une vitesse caractérisée par le vecteur $\vec{v}_0$.

On supposera :

- que le choc est élastique
- que les solides sont toujours en translation.

On notera $\vec{v}'_A$ et $\vec{v}'_B$ les vecteurs vitesses respectifs des deux solides après le choc.

1. Préciser les caractéristiques d'un choc élastiques.
2. On considère le même choc élastique analysé dans deux référentiels distincts : celui du laboratoire noté R, galiléen, et un autre référentiel R_1 en translation par rapport à R. On notera $\vec{v}_e$ le vecteur vitesse de translation de R_1 par rapport à R.
 - 2.1. Quelle est la propriété caractéristique d'un référentiel galiléen ?
 - 2.2. Si le référentiel R est galiléen, à quelles conditions R_1 le sera-t-il aussi ?
 - 2.3. Quelle est la relation entre les deux vecteurs vitesses $\vec{v}$ et $\vec{v}_1$ d'un même point exprimés dans les deux référentiels.
 - 2.4. Exprimer la conservation de l'énergie lors du choc entre les deux solides dans chaque référentiel. En utilisant les relations précédentes, quelle loi de conservation retrouve-t-on ?
3. On suppose d'abord que les vecteurs vitesses $\vec{v}'_A$ et $\vec{v}'_B$ des deux solides restent colinéaires après le choc.

On choisit un axe x'Ox orienté dans le sens de $\vec{v}_0$ (figure 1).

- 3.1. Exprimer en fonction du rapport des masses $\alpha = \frac{m_B}{m_A}$ et de v_0 , valeur algébrique de $\vec{v}_0$, les valeurs algébriques v'_A et v'_B des vitesses des deux mobiles après le choc.

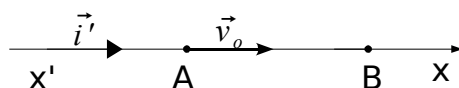


Figure 1 : Avant le choc (référentiel du laboratoire R)

3.2. Qu'obtient-on si $m_A = m_B$?

- 4.** On suppose maintenant que les directions des vitesses sont quelconques après le choc et que les masses des deux solides sont égales.

Montrer que les vecteurs vitesses $\vec{v}'_A$ et $\vec{v}'_B$ sont orthogonaux après le choc.

Peut-on déterminer complètement ceux-ci ?

- 5.** Les masses m_A et m_B sont différentes et on suppose les directions des vecteurs vitesses $\vec{v}'_A$ et $\vec{v}'_B$ quelconques. Le solide B est immobile avant le choc.

5.1. Dans le référentiel R du laboratoire, déterminer, en fonction de $\vec{v}_o$ et du rapport

$\alpha = \frac{m_B}{m_A}$, le vecteur vitesse $\vec{v}_G$ et le mouvement du centre de masse G de l'ensemble A

et B :

- avant le choc ;
- après le choc.

5.2. On utilise un référentiel, noté R^* , appelé référentiel du centre de masse (ou encore référentiel barycentrique).

Ce référentiel est animé, par rapport au référentiel du laboratoire, supposé galiléen, d'un mouvement de translation tel, qu'à chaque instant, le centre de masse soit constamment immobile dans ce référentiel.

a. A quelle condition R^* sera-t-il aussi galiléen ?

b. Avant le choc, déterminer dans R^* , en fonction de m_A , α et $\vec{v}_o$:

- les vecteurs vitesses $\vec{v}_A^*$ et $\vec{v}_B^*$;
- les quantités de mouvement $\vec{p}_A^*$ et $\vec{p}_B^*$;
- les énergies cinétiques E_{cA}^* et E_{cB}^* ,

des deux solides A et B.

5.3. Après le choc, supposé élastique,

a. Comparer les quantités de mouvement $\vec{p}'_A$ et $\vec{p}'_B$.

b. Calculer l'énergie cinétique totale E'_c du système formé par les deux solides et montrer que les modules des quantités de mouvement ne sont pas modifiés par le choc dans R^* .

c. On suppose que dans R^* , toutes les directions des quantités de mouvement et donc des vitesses sont probables. On peut représenter $\vec{v}'_A$ par un vecteur d'origine fixe et dont l'extrémité se trouve sur un cercle (figure 2).

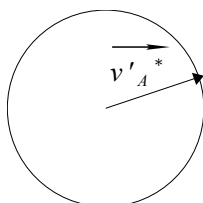


Figure 2 : La vitesse $\vec{v}'_A$ après le choc (référentiel R^*).

Représenter alors $\vec{v}'_B$ avec la même origine lorsque $\alpha < 1$.

En utilisant les lois de composition des vitesses, représenter graphiquement les vecteurs vitesses $\vec{v}'_A$ et $\vec{v}'_B$ dans le référentiel du laboratoire. Montrer que, dans ce dernier cas, le projectile A est dévié au maximum d'un angle θ_m que l'on calculera dans le cas où $\alpha = m_B/m_A = 1/2$.

B. Ressort

- Le solide A, de masse m_A , glissant en translation sur la table horizontale, est animé d'une vitesse caractérisée par le vecteur $\vec{v}_o$, les frottements étant toujours négligeables. Il vient heurter l'extrémité libre M d'un ressort, initialement détendu, de longueur à vide l_o , de raideur k et de masse négligeable ; ses spires ne sont pas jointives. L'autre extrémité du ressort est attachée à une paroi fixe. On prend comme état de référence le ressort détendu.

1.1. On appelle m la projection de M sur un axe Ox parallèle à la direction du ressort (figure 3) ; on pose $\overline{Om} = x$. Lorsque le ressort est au repos, $x=0$.

Exprimer l'énergie potentielle de ce ressort à un instant quelconque, en fonction de x .
En déduire la longueur minimale du ressort au cours de l'interaction.

1.2.a. Exprimer les forces appliquées au solide A.

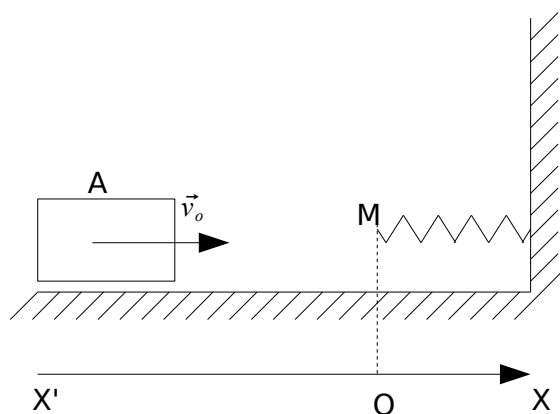


Figure 3 : Avant le choc contre le ressort

b. En déduire l'équation différentielle du mouvement.

c. Donner la solution $x(t)$ de cette équation.

d. Sachant que le contact solide-ressort cesse lorsque ce dernier reprend sa longueur à vide, en déduire la durée τ de l'interaction.

Application numérique : $v_o = 0,25 \text{ m.s}^{-1}$; $k=15 \text{ N.m}^{-1}$; $m_A = 0,6 \text{ kg}$; $l_o = 0,15 \text{ m}$.

- 2.** Le ressort est lié maintenant au solide B, de masse m_A , initialement immobile. Le projectile A de vecteur vitesse $\vec{v}_o$ vient heurter l'autre extrémité libre du ressort initialement détendu (figure 4)

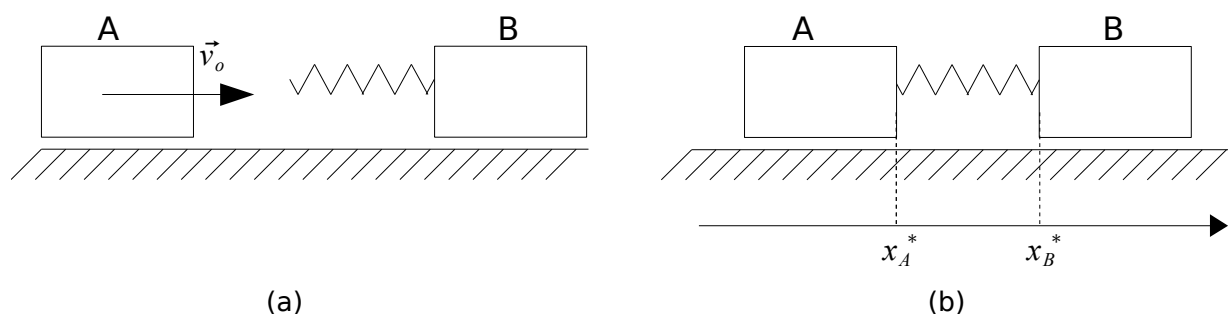


Figure 4 : (a) avant le choc dans R ; (b) dans R^* .

On suppose que ce choc est unidirectionnel, que la table est horizontale et que les frottements sont négligeables.

2.1. Expliquer pourquoi, dans le référentiel du laboratoire, on ne peut transformer toute l'énergie cinétique du projectile en énergie potentielle élastique.

2.2 Pourquoi est-ce possible dans le référentiel du centre de masse R^* ? Calculer dans celui-ci l'énergie cinétique, avant le choc, du système formé par les deux solides et en déduire la longueur minimale du ressort au cours de l'interaction.

Application numérique : $v_o = 0,25 \text{ m.s}^{-1}$; $k=15 \text{ N.m}^{-1}$; $m_A = m_B = 0,6 \text{ kg}$; $l_o=0,15 \text{ m}$.

2.3

a. Calculer la vitesse du centre de masse des deux solides dans le référentiel du laboratoire. Celle-ci est-elle affectée par l'interaction ? Le référentiel du centre de masse R^* est-il galiléen ?

b. Dans ce référentiel, R^* , on utilise un repère d'origine G . Soient x_A^* et x_B^* les abscisses des deux extrémités du ressort.

Exprimer les forces appliquées à chaque solide, dans ce référentiel, en fonction de la raideur k et des abscisses x_A^* et x_B^* .

Ecrire les équations différentielles du mouvement de B et de A.

En déduire $x(t) = x_B^*(t) - x_A^*(t)$.

c. En supposant que l'interaction cesse lorsque le ressort reprend sa longueur initiale, déterminer :

- la durée de l'interaction τ' ;

- les vitesses, après l'interaction, des solides A et B dans le référentiel R^* puis dans le référentiel R .

Application numérique : $v_o = 0,25 \text{ m.s}^{-1}$; $k=15 \text{ N.m}^{-1}$; $m_A = m_B = 0,6 \text{ kg}$; $l_o = 0,15 \text{ m}$.

C. Interaction de deux protons

1. Deux protons, en interaction mutuelle dans le cadre de la mécanique non relativiste, sont à une distance r_o , lorsque le premier est immobile et le second animé d'une vitesse $\vec{V}_o$ dirigée vers le premier (figure 5).

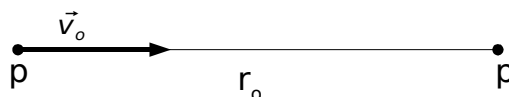


Figure 5 : Interaction de deux protons.

1.1. Quelles grandeurs physiques sont conservées au cours du temps ?

1.2. Expliquer pourquoi, dans le référentiel du laboratoire, on ne pourra jamais trouver simultanément les deux protons avec une vitesse instantanée nulle.

Pourquoi est-ce possible dans le référentiel du centre de masse ?

1.3. Indiquer les caractéristique du champ électrostatique $\vec{E}$ et du potentiel V créés par une charge ponctuelle q en un point situé à une distance r de celle-ci. Quelles sont les surfaces équipotentielles et les lignes de champ ?

1.4. Donner les expressions des forces exercées entre les deux protons en fonction de leur distance r .

Exprimer leur énergie potentielle d'interaction E_p .

1.5. Calculer l'énergie cinétique initiale de l'ensemble des deux protons dans le référentiel du centre de masse.

En déduire l'énergie potentielle maximale de ce système ainsi que la distance minimale entre les deux protons.

Calculer la vitesse instantanée de chacun des protons dans le référentiel du laboratoire lorsque ceux-ci sont à leur distance minimale.

Application numérique : r_o est infiniment grand ; $v_o = 2.10^6 \text{ m.s}^{-1}$.

2. On considère à présent, dans le cadre de la mécanique relativiste, un proton incident dont l'énergie cinétique initiale est grande. Celle-ci est suffisamment élevée et on

espère créer au cours d'un choc sur le proton immobile une paire formée d'un proton p et d'un anti-proton $\bar{p}$:

$$p + p \Rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

On négligera l'énergie potentielle initiale d'interaction, le proton incident étant éloigné du proton cible.

2.1. Ce choc est-il élastique ?

2.2. Quelles grandeurs physiques sont conservées ?

2.3. Dans quel référentiel peut-on, éventuellement, obtenir les quatre particules simultanément immobiles ?

En déduire :

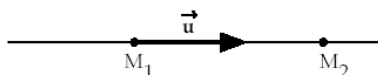
- l'énergie cinétique initiale minimale dans ce référentiel et dans celui du laboratoire ;
- la vitesse initiale minimale du projectile dans le référentiel du laboratoire.

2.4. Comparer cette dernière vitesse à celle que devraient avoir deux protons ayant deux vitesses directement opposées dans le laboratoire.

FORCES CENTRALES

Forces centrales – (extrait CAPES externe session 1999)

1. a. On considère deux objets ponctuels de masse m_1 et m_2 , situés à une distance r l'un de l'autre, aux points M_1 et M_2 . Exprimer la force $\vec{f}$ d'interaction exercée par m_1 sur m_2 . On notera $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2 .



1. b. Montrer que si m_1 est une masse à symétrie sphérique de centre M_1 , la relation précédente est vérifiée à l'extérieur de la sphère (on pourra utiliser le théorème de Gauss).

1.c. Etablir l'expression de l'énergie potentielle E_p du système constitué des masses m_1 et m_2 . On choisira comme convention que l'énergie potentielle s'annule lorsque les masses sont infiniment distantes.

2.a. On considère le système isolé constitué de deux objets ponctuels de masses m_1 et m_2 , situés en M_1 et M_2 dans un référentiel galiléen R . On associe à R l'origine O et la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On note G le centre d'inertie du système.

Exprimer le vecteur $\vec{OG}$ en fonction de $\vec{OM}_1$ et $\vec{OM}_2$.

2.b. Préciser en le justifiant le mouvement du point G dans le référentiel R . En déduire que le référentiel barycentrique R_G est galiléen.

2.c. On note $\vec{f}_2$ la force qu'exerce la masse m_1 sur la masse m_2 et $\vec{M}_1 \vec{M}_2 = \vec{r} = r\vec{u}$. Etablir la relation :

$$\mu \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{R_G} = \vec{f}_2,$$

dans laquelle on établira l'expression de la masse réduite μ en fonction de m_1 et m_2 .

3. a. Dans la suite de cette partie I, on se place dans le référentiel barycentrique R_G .

L'objet de masse m_1 se déplace à la vitesse $\vec{v}_1$ et l'objet de masse m_2 à la vitesse $\vec{v}_2$. Etablir l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_N$ de l'ensemble du système par rapport à un point N quelconque. Montrer que sa valeur est indépendante de la position du point N . On notera $\vec{\sigma}$ ce moment cinétique.

3.b. On pose $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ et $\vec{GM} = \vec{M}_1 \vec{M}_2 = r \vec{u}$. Montrer que $\vec{\sigma} = \mu \vec{GM} \wedge \vec{v}$.

3.c. Justifier que :

- le moment cinétique est conservé ;
- le mouvement est plan.

3.d. Dans le plan de la trajectoire, orienté par le moment cinétique, on note (r, θ) les coordonnées polaires du vecteur $\vec{GM}$ et $\vec{u}_\theta$ le vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{u}$ (voir figure). Montrer que $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est constant au cours du temps. Justifier le nom de *constante des aires* donnée à la grandeur $C/2$.

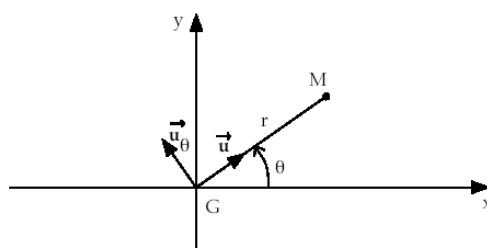


Figure 2

3.e. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c du système constitué par les deux objets. Montrer que cette expression est identique à celle obtenue pour un objet de masse μ se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$. Exprimer E_c en utilisant les coordonnées polaires. En déduire que :

$$E_c = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right].$$

3.f. Ecrire l'expression de l'énergie mécanique du système.

4. On considère le système constitué d'un noyau atomique de masse M , de charge Ze , et d'une particule α (noyau d'hélium), de masse m et de charge $2e$.

L'interaction gravitationnelle peut être négligée devant l'interaction électrostatique ; le justifier en considérant $M = 3,27 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$, $Z = 79$ et $m = 6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Par analogie avec les résultats précédents, donner l'expression de l'énergie mécanique du système.

Champ newtonien - Extrait Capes externe 1992

I. Mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien

On étudie le mouvement d'un satellite dans un champ le champ gravitationnel terrestre. Ce satellite est considéré comme un objet ponctuel. La Terre est assimilée à une répartition sphérique de masse. On montre que dans ces conditions son champ gravitationnel en un point extérieur est identique à celui que créerait une masse ponctuelle placée en son centre et égale à sa masse totale.

L'étude est menée dans le référentiel géocentrique lié au centre O de la Terre et en translation par rapport aux axes de Copernic. Ce référentiel est considéré galiléen.

On ne tient compte que du champ gravitationnel terrestre.

On utilisera les valeurs numériques suivantes :

- ◆ masse de la Terre : $M_T = 6,00 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;
- ◆ rayon de la Terre : $R_T = 6400 \text{ km}$;
- ◆ constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$;
- ◆ durée du jour sidéral : $T_0 = 86\,164 \text{ s}$.

1. Donner l'expression du champ gravitationnel terrestre $\vec{g}$ en un point M situé à la distance $r > R_T$ du centre de la Terre.

2. Satellites circulaires.

On désire placer un satellite de masse m sur une orbite circulaire de rayon r dont le centre sera confondu avec le centre de la Terre.

a. Montrer que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.

b. Le satellite ayant atteint, au cours de la phase de lancement, un point M distant de r du centre O de la Terre, quelles caractéristiques doit-on donner à son vecteur vitesse pour le placer en ce point en orbite circulaire ?

- c.** Etablir l'expression de la période T du satellite en fonction du rayon de son orbite.
- d.** Etablir l'expression de l'énergie E du satellite sur sa trajectoire circulaire en fonction du rayon de son orbite.
- e.** Soit λ la latitude de base de lancement et Ω la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles. Quelle énergie faut-il communiquer au satellite pour le placer, depuis le sol, sur son orbite circulaire ? Quel est l'intérêt d'une base équatoriale ?
- f.** Application numérique : $r = 6\,600\text{ km}$;
Calculer la vitesse du satellite sur son orbite circulaire, ainsi que la période de son mouvement.
- g.** Satellites géostationnaires.
- ◆ Donner la définition d'un satellite géostationnaire.
 - ◆ Est-il possible de placer un satellite géostationnaire à la verticale de Paris ? Justifier la réponse.
 - ◆ Calculer le rayon de l'orbite géostationnaire.
 - ◆ Calculer la vitesse du satellite sur cette orbite.

3. Etude d'une orbite de transfert.

On désire faire passer la satellite précédent de l'orbite circulaire ($\mathcal{O}_1$) de rayon r_1 à l'orbite circulaire ($\mathcal{O}_2$) de rayon r_2 ($r_2 > r_1$). Pour y parvenir, on lui fait emprunter une orbite de transfert elliptique (ξ) en son périégée M_1 à l'orbite ($\mathcal{O}_1$) et en son apogée M_2 à l'orbite ($\mathcal{O}_2$). Les passages en M_1 de l'orbite ($\mathcal{O}_1$) à l'orbite (ξ) et en M_2 de l'orbite (ξ) à l'orbite ($\mathcal{O}_2$), sont effectués en fournissant au satellite, à l'aide de propulseurs, deux impulsions permettant d'augmenter respectivement son énergie de ΔE_1 et ΔE_2 (figure 1).

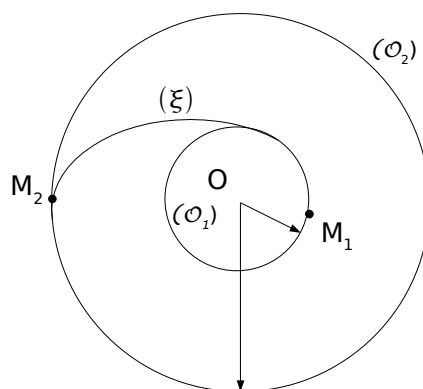


Figure 1

On admettra que les relations donnant E et T , établies avec r pour des trajectoires circulaires, restent formellement valables ici, pour des trajectoires elliptiques de demi-grand axe a en remplaçant r par a .

- Quel est le demi-grand axe de l'orbite de transfert ?
- Quelles sont les énergies respectives du satellite sur les orbites $(\mathcal{O}_1)$, $(\mathcal{O}_2)$, (ξ) en fonction de G , M_T , m , r_1 et r_2 ?
- Exprimer ΔE_1 et ΔE_2 en fonction des mêmes paramètres.

Application numérique : Calculer ΔE_1 et ΔE_2 : $m=100$ kg ; $r_1 = 6\,600$ km ; $r_2 = 42\,200$ km.

- Calculer la durée du transfert de l'orbite $(\mathcal{O}_1)$ d'altitude 200 km, à l'orbite $(\mathcal{O}_2)$ d'altitude 35 800 km.

II. Etude énergétique du mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien attractif.

Soit O un point fixe du référentiel d'étude galiléen $(\mathcal{R})$.

On note r la distance à O d'un point M quelconque de l'espace et on pose :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}.$$

Une particule de dimensions négligeables, assimilée à un point matériel de masse m est animée dans $(\mathcal{R})$ d'une vitesse $\vec{v}$. Elle subit en M la seule force :

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{u} \quad (k \text{ constante positive})$$

- Montrer que le moment cinétique en O du point matériel reste constant au cours du mouvement. En déduire que ce mouvement s'effectue dans un plan contenant le centre

des forces en O.

Dans la suite on aura intérêt à utiliser la base cylindrique $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ définie de la façon suivante :

- ♦ $\vec{u}$: vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$;
- ♦ $\vec{u}_z$: vecteur unitaire colinéaire au moment cinétique de la particule et de même sens ;
- ♦ $\vec{u}_\theta$: vecteur tel que $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ soit orthonormée directe.

2. Montrer que la force $\vec{f}$ dérive d'une énergie potentielle E_p . Etablir l'expression de cette énergie potentielle en la prenant par convention nulle à l'infini.
3. Définir l'énergie mécanique du point matériel. Montrer que c'est une constante du mouvement.
4. Soit Ox un axe cartésien du référentiel $(\mathcal{R})$. On repère la position M de la particule dans le plan de son mouvement par ses coordonnées polaires r et $\theta = (Ox, \vec{u})$.
 - a. On définit la constante des aires du mouvement de la particule par : $C = r^2 \dot{\theta}$. Justifier le terme « constante ».

b. Les conditions initiales du mouvement sont définies par :

$$r = r_0 ; \quad \theta = \theta_0 ; \quad \|\vec{v}\| = v_0 ; \quad (\vec{u}, \vec{v}_0) = \alpha_0.$$

Exprimer E et C en fonction de k, m, r_0, v_0 et α_0 .

c. Montrer que l'énergie mécanique de la particule peut se mettre sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E'(r) \quad \text{avec} \quad E'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}.$$

d. Montrer que la fonction $E'(r)$ admet un minimum E'_m pour $r = r_m$. Exprimer E'_m et r_m en fonction de k, m, r_0, v_0 et α_0 .

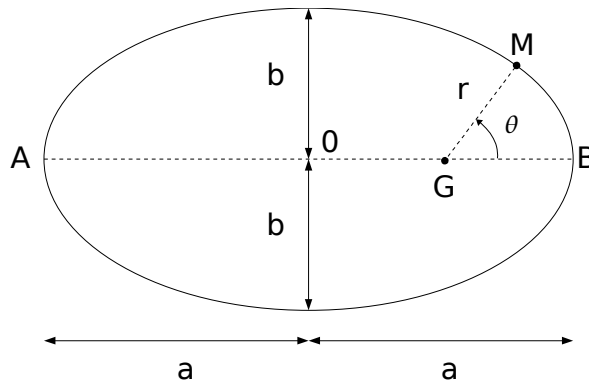
Tracer l'allure du graphe $E'(r)$.

- e. Définir la condition que doit satisfaire E pour que le point matériel reste prisonnier du centre des forces.
- f. Quelle est, en fonction de k, m, r_0 la valeur minimale V_{0_m} de v_0 pour que le point matériel échappe au centre des forces ?
- g. Quelle est la nature du mouvement lorsque $E = E'_m$?

Les coniques - Extrait CAPES 2000 Physique et Electricité Appliquée

Rappels sur les coniques

- *Les ellipses*



O : centre de l'ellipse

a : longueur du demi grand axe

b : longueur du demi petit axe

G : foyer de l'ellipse

A : apocentre, GA : distance apocentrique (la plus grande valeur de r),

B : péricentre, GB : distance péricentrique (la plus petite valeur de r) ;

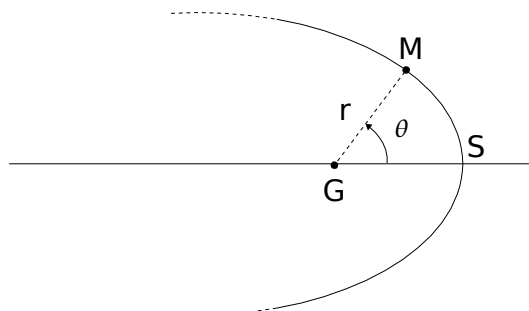
Equation polaire de l'ellipse avec origine en G : $r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}$ où P : paramètre de

l'ellipse, $P = \frac{b^2}{a}$, e : excentricité de l'ellipse, $0 < e < 1$.

Surface de l'ellipse : $S = \pi ab$.

Cas du cercle : $e=0$.

- *Paraboles ou hyperboles*



équation polaire : $r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}$

parabole : $e=1$,

hyperbole : $e > 1$,

P : paramètre,

G : foyer,

S : sommet,

GS : distance péricentrique.

D'une manière générale, on appelle axe focale d'une conique l'axe sur lequel se situent les foyers de la conique.

PARTIE I

On considère un système isolé (S) constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses

respectives m_1 et m_2 entre lesquels s'exercent les forces : $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1 = -k \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^3}$ où $\vec{f}_2$ et $\vec{f}_1$

sont les forces exercées respectivement par M_1 sur M_2 et M_2 sur M_1 ; $k = g m_1 m_2$ où g est la constante de gravitation universelle. On désignera par (R) un référentiel galiléen et par (R*) un référentiel barycentrique de (S) relativement à (R), c'est-à-dire un référentiel ayant son origine en G, centre de masse de (S), et des axes de direction invariable relativement à (R). Soit F le

point matériel fictif associé à (S) repéré par $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ et dont la masse est $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

1. (R*) est-il galiléen ? Justifier la réponse.
2. $\vec{V}^*$ désignant la vitesse de F dans (R*), exprimer $\vec{V}^*$ à l'aide des vitesses de M_1 et M_2 par rapport à (R*) puis à l'aide des vitesses de M_1 et M_2 par rapport à (R).
3. Donner les expressions de $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{GF}$ et des masses m_1 et m_2 .
4. Exprimer les quantités de mouvement de M_1 et M_2 par rapport à (R*) en faisant intervenir μ et $\vec{V}^*$. Ces quantités de mouvement sont notées respectivement de $\vec{P}_1^*$ et $\vec{P}_2^*$. Que vaut $\vec{P}_1^* + \vec{P}_2^*$? Cette propriété est-elle spécifique du référentiel barycentrique ?

5. Donner l'expression du moment cinétique total $\vec{L}^*$ de (S), dans le référentiel barycentrique, en fonction de grandeurs relatives à F.
6. Donner l'expression de l'énergie cinétique K^* de (S), dans le référentiel barycentrique, en fonction de grandeurs relatives à F.
7. Exprimer l'énergie cinétique K de (S), dans le référentiel (R), en fonction de K^* , m_1 et m_2 , et $\vec{V}_{G/R}$: vitesse de G par rapport à (R).
8. Montrer que le mouvement de F dans (R*) est celui d'un point (dont on donnera la masse) soumis à une force que l'on précisera.
9. Indiquer comment on peut, d'un point de vue théorique, déterminer le mouvement de F dans (R*) puis comment, connaissant le mouvement de F dans (R*), on peut déterminer le mouvement de M_1 et de M_2 dans (R*). En supposant que le mouvement de F dans (R*) est elliptique et que $m_1/m_2=2$, représenter les trajectoires de M_1 , M_2 et F dans (R*)

PARTIE II

(S) constitué de deux points matériels M_1 et M_2 est toujours isolé ; les masses m_1 et m_2 sont telles que m_1 est très grande devant m_2 . On posera $m_1=M$ et $m_2=m$. Les forces d'interaction entre M_1 et M_2 sont les même que dans la partie I. (R) et (R*) ont la même signification que dans la partie I.

1. Compte tenu des valeurs m_1 et m_2 , avec quels points matériels de (S) sont confondus le point fictif F (défini dans la partie I) et le centre de masse G de (S) ?
2. Montrer que le moment cinétique total $\vec{L}^*$ de (S) dans le référentiel barycentrique, est un vecteur constant. En déduire, en l'expliquant, une propriété particulière du mouvement de F dans (R*). Préciser où se situe la trajectoire de F. On donne $\vec{V}_{(t=0)}^*$ et $\vec{GF}_{(t=0)}$: vecteur vitesse de F par rapport à (R*) et vecteur position de F dans (R*) à l'instant $t=0$.
3. La base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ [voir figure 1], orthonormée directe, est la base locale des coordonnées cylindriques. G est pris pour origine d'un trièdre (G_x, G_y, G_z) associé à (R*) dont les axes ont pour vecteurs directeurs respectivement $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ constituant une base orthonormée directe ; $\vec{L}^*$ est colinéaire à $\vec{k}$ et on pose $\vec{L}^* = L^* \vec{k}$, avec $L^* > 0$ et θ orienté dans le sens du mouvement.

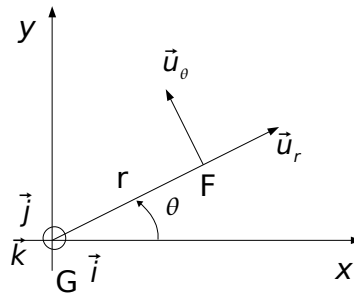


Figure 1

Donner la vitesse $\vec{V}^*$ de F par rapport à (R^*) , son module V^* , ainsi que son accélération $\vec{a}^*$ par rapport à (R^*) en fonction de $r = \|\vec{GF}\|$, θ ainsi que leurs dérivées par rapport au temps et des vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ quand cela sera nécessaire.

4. Exprimer $C = \frac{L^*}{m}$ en fonction de r et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ où C porte le nom de constante des aires.

En déduire et énoncer la loi des aires. Application : en supposant la trajectoire de F dans (R^*) elliptique, expliquer pour lequel des points, apocentre ou péricentre, V^* est le plus grand.

5. $u = \frac{1}{r}$, on admet pour la suite que :

- $V^{*2} = C^{*2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$
- $\vec{a}^* = -C^{*2} u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{u}_r$

En utilisant une de ces formules, retrouver le résultat de l'application de II.4.

6. Montrer que $\vec{f}_1 \cdot d\vec{M}_1 + \vec{f}_2 \cdot d\vec{M}_2 = -dE_p(r)$ où $d\vec{M}_1$ et $d\vec{M}_2$ représentent respectivement un déplacement élémentaire du point M_1 et du point M_2 . Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle $E_p(r)$ entre M_1 et M_2 en fonction de G , M , m , r . La constante d'intégration intervenant dans $E_p(r)$ sera choisie en considérant que lorsque M_1 et M_2 sont à l'infini l'un de l'autre, l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle est nulle.

7. Montrer que l'énergie mécanique du système (S) dans (R^*) se met sous la forme :

$$E = W(r) + \frac{1}{2} m C^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2.$$

Déterminer $W(r)$. Que peut-on dire de E ? Faire une étude précise (tableau de variation, existence d'extremum ...) de $W(r)$ pour r variant de 0 à l'infini ; on posera $r_o = \frac{C^2}{gM}$.
Tracer $W(r)$.

- 8.** Expliquer graphiquement la différence fondamentale entre les trajectoires de F dans (R^*) lorsque $E \geq 0$ et lorsque $E < 0$.
- 9.** On se place dans le cas particulier où le mouvement de F dans (R^*) est elliptique. La longueur du grand axe est $2a$, r_a et r_b désignent respectivement la plus grande distance (ou distance apocentrique) et la plus petite distance (ou distance péricentrique) de F à G . Indiquer de quelle équation du deuxième degré en r où figure E sont racines r_a et r_b .

En déduire que $E = -\frac{gMm}{2a}$

- 10.** En utilisant l'expression de $\vec{a}^*$ donnée en II.5., déterminer dans le cas général l'équation polaire de la trajectoire de F : $r = f(\theta)$. On confondra l'axe Ox de la figure 1 avec l'axe focal et $\theta = 0$ correspondra à la distance péricentrique. Donner, en fonction des données du problème (g , M , C) et d'une constante d'intégration si besoin est, le paramètre p de la conique et l'excentricité e .
- 11.** A partir de l'expression de E dans la question II.7. Et de l'expression $r = f(\theta)$ trouvée en II.10., exprimer E en fonction de l'excentricité e de la conique, m , M , g , C . Retrouve-t-on les résultats du II.8. ? Expliquer.
- 12.** Retrouver, à partir de l'expression de E obtenue en II.11., la relation particulière obtenue en II.9. Liant E et a dans le cas du mouvement elliptique de F dans (R^*) . Déterminer le temps mis par F pour parcourir l'ellipse, on l'exprimera en fonction de M , g et a .
- 13.** Application numérique : en observant F à un instant donnée, on trouve $r = 9370 \text{ km}$ et $V^* = 6333 \text{ m.s}^{-1}$; calculer la longueur du grand axe de la trajectoire elliptique de F dans (R^*) ; on donne $M = 5,99.10^{24} \text{ kg}$, $g = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$.

14. Application : pour cette question, F est supposé avoir un mouvement parabolique dans (R^*) . Lorsque F est au sommet S de la parabole, la distance r vaut 9370 km, calculer V^* en S ainsi que le paramètre P de la parabole. On donne $M = 5,99.10^{24} \text{ kg}$, $g = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$.

15. On se place dans le cadre de II.14. Déterminer littéralement le temps T mis par F pour passer du point S où $\theta=0$ au point sur la parabole où $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Faire l'application numérique.

Champ gravitationnel - Extrait Capes Physique et Electricité appliquée 2003

MOUVEMENTS DANS UN CHAMP GRAVITATIONNEL

Données :

Constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$;

Rayon moyen de la Terre : $R = 6378 \text{ km}$;

Masse de la Terre : $M = 6,0.10^{24} \text{ kg}$;

Masse du Soleil : $M_s = 2,0.10^{30} \text{ kg}$.

Les vecteurs sont notés en caractère gras, par exemple A pour le champ gravitationnel $\vec{A}$.

1. LE CHAMP GRAVITATIONNEL.

1.1 Définition

Rappeler l'expression des forces gravitationnelles s'exerçant entre deux masses ponctuelles m_1 et m_2 situées respectivement en des points M1 et M2 et distantes de r (on fera un schéma).

Donner l'expression vectorielle du champ de gravitation $A(M_2)$ créé au point M2 par la masse m_1 défini par le quotient par m_2 de la force de gravitation exercée sur m_2 .

Représenter A(M2) sur le schéma précédent.

1.2 Champ gravitationnel crée par la Terre

On assimile la Terre à une sphère pleine de rayon R pour laquelle on a une symétrie sphérique de la distribution de masse (la masse volumique μ ne dépend que de la distance d au centre O de la Terre).

On peut alors montrer qu'en un point extérieur à la Terre, le champ de gravitation créé par la Terre est le même que celui créé par une masse ponctuelle égale à M, masse de la Terre, et située en O centre de la Terre.

1.2.1 Représenter sur un schéma le champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre, aux pôles et à l'équateur.

1.2.2 Calculer l'intensité du champ gravitationnel terrestre en un point quelconque de la surface de la Terre.

1.3 Energie potentielle dans un champ extérieur

1.3.1 Définir dans le cas général la notion d'énergie potentielle E_p . Donner la relation entre la force et l'énergie potentielle associée.

1.3.2 Peut-on à toutes les forces associer une énergie potentielle ? Donner un exemple pour étayer votre réponse.

1.3.3 On considère une masse ponctuelle m située à la distance r du centre O de la Terre. ($r > R$)

Montrer que l'énergie potentielle E_p d'interaction gravitationnelle entre cette masse et la Terre vaut :

$$E_p = -\frac{GmM}{r}$$

2. DYNAMIQUE DANS DIFFERENTS REFERENTIELS

On supposera que dans le référentiel de Copernic le centre O de la Terre effectue autour du Soleil un mouvement circulaire uniforme de rayon $D=150.106$ km avec une période $T'=365,25$ jours (jours solaires). La Terre tourne sur elle-même autour de l'axe des pôles

Δ avec une vitesse angulaire Ω correspondant à une période **$T = 86164$ s** (jour sidéral). On supposera (sauf dans la question 2.1.4) que l'axe Δ est de direction fixe et que la vitesse angulaire possède un module constant.

Le référentiel de Copernic (appelé aussi référentiel de Kepler) sera considéré comme galiléen.

On adoptera les notations suivantes :

$\mathbf{A}_T(P)$ le vecteur champ de gravitation dû à la Terre au point P.

$\mathbf{A}_A(P)$ le vecteur champ de gravitation dû aux autres astres que la Terre au point P.

$\mathbf{F}$ la force résultante des forces autres que celles de gravitation appliquées au point matériel situé en $\mathbf{P}$.

On montre que l'équation générale du mouvement dans le référentiel terrestre d'un objet ponctuel de masse m , situé au point P, de vitesse $\mathbf{v}_r$ et d'accélération $\mathbf{a}_r$, dans ce référentiel est :

$$m\mathbf{a}_r(P) = \mathbf{F} + m\mathbf{C} + m\mathbf{A}_T(P) - m\Omega \wedge (2\mathbf{v}_r + \Omega \wedge \mathbf{OP})$$

1.

où le vecteur $\mathbf{C}$, appelé champ des marées et valant $\mathbf{A}_A(P) - \mathbf{A}_A(O)$, sera négligé dans toute la suite du problème, ce qui revient à considérer le référentiel géocentrique comme galiléen et à négliger l'action des astres autres que la Terre.

2.1 Référentiels

2.1.1 Définir le référentiel de Copernic.

2.1.2 Donner la définition du référentiel géocentrique. Préciser son mouvement.

2.1.3 Définir le référentiel terrestre.

2.1.4 En réalité, l'axe Δ n'est pas fixe mais décrit un cône en 26 000 ans :
comment appelle-t-on ce phénomène ?

La vitesse angulaire n'est pas rigoureusement constante et diminue très lentement (T diminue de quelques ms par siècle) : pouvez-vous donner une cause de cette diminution ?

2.1.5 Comment appelle-t-on le plan dans lequel se déplace le centre de la Terre ?
Préciser sur un schéma figurant le Soleil (S), la Terre et l'axe des pôles :

- ♦ le sens de parcours de la Terre sur son orbite autour du Soleil
- ♦ le sens de rotation de la Terre sur elle-même.

(On placera le pôle nord dans le demi-espace supérieur au plan du mouvement de O).

2.1.6 Donner la définition d'un référentiel galiléen.

2.1.7 Le référentiel géocentrique et le référentiel terrestre sont-ils galiléens ?
Si oui, à quelles conditions ?

2. Mouvement de la Terre dans le référentiel de Copernic

2.2.1 Énoncer le théorème du centre d'inertie (encore appelé théorème de la résultante cinétique).

2.2.2 Déterminer l'expression du vecteur accélération absolue $\mathbf{a}(O)$ du centre O de la Terre en fonction de D et T' et d'un vecteur unitaire que l'on définira sur un schéma. Représenter $\mathbf{a}(O)$ sur ce schéma.

2.2.3 Justifier par des considérations simples que $\mathbf{a}(O) \approx \mathbf{A}_A(O)$.

2.2.4 En ne prenant en compte que l'action du Soleil, déterminer, en fonction de G , M_s et D , le module de la vitesse du centre O de la Terre et calculer sa valeur.

2.3 Le poids $p=mg$ d'un corps

2.3.1 Donner la définition de $\mathbf{p}$. Comment appelle-t-on le vecteur $\mathbf{g}$?

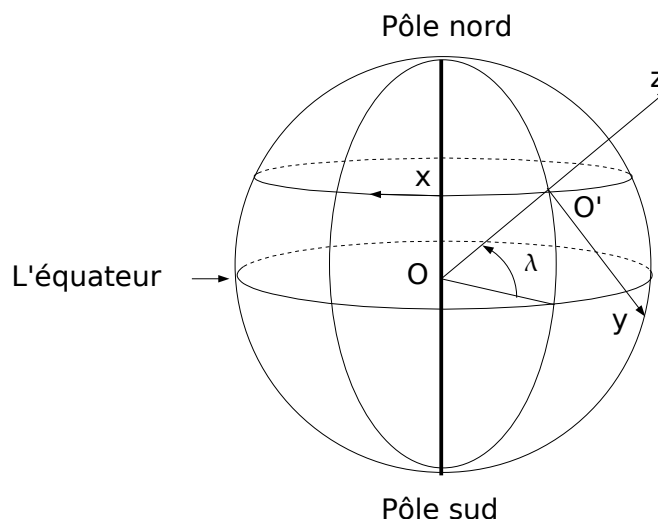
2.3.2 Déterminer l'expression de $\mathbf{g}(P)$ en fonction des vecteurs $\mathbf{A}_T(P)$, $\vec{\Omega}$ et $\mathbf{OP}$.

Montrer que $\mathbf{g}(P)$ peut s'écrire plus simplement en introduisant le vecteur $\mathbf{HP}$ où H est la projection du point P sur l'axe des pôles Δ .

Calculer la valeur de la norme de $\mathbf{g}(P)$ à l'équateur.

2.4 Mouvement d'un projectile dans le référentiel terrestre.

En un point O' de latitude λ situé à la surface de la Terre, on définit un repère direct $O'xyz$ (de vecteurs de base $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$) lié à la Terre et tel que l'axe $O'x$ soit dirigé vers l'ouest, l'axe $O'y$ vers le sud et l'axe $O'z$ selon la verticale ascendante (on négligera l'angle éventuel entre OO' et $O'z$).



Un projectile de masse $m=10$ grammes est lancé à partir du point O' vers une cible avec une vitesse initiale $V_o = V_o \mathbf{u}_y$ ($\mathbf{u}_y$: vecteur unitaire de l'axe $O'y$), on a $V_o = 1000 \text{ m.s}^{-1}$. La cible est parallèle au plan $xO'z$ et situé à une distance $d = 100 \text{ m}$ de

ce plan.

On néglige tout frottement. On prendra $g = 9,81 \text{ m.s}^{-1}$ et $\lambda = 45^\circ$ de latitude nord.

2.4.1 On considère le référentiel terrestre comme galiléen.

Déterminer les coordonnées (x_I , y_I , z_I) du point d'impact I du projectile sur la cible, littéralement en fonction de V_0 , g et d , puis numériquement.

2.4.2 On tient compte maintenant de la rotation de la Terre.

a. Déterminer dans la base liée au repère Oxyz les composantes du vecteur $\vec{\Omega}$ vecteur vitesse-rotation de la terre sur elle-même.

b. Montrer que l'équation du mouvement du projectile dans le référentiel terrestre devient :

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} - 2 \vec{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r$$

c. En supposant que le vecteur vitesse relative $\mathbf{v}_r$ figurant dans l'expression ci-dessus est celle obtenue dans la question 2.4.1 (méthode dite de perturbation), déterminer littéralement en fonction de $\vec{\Omega}$, V_0 , g , d et λ puis numériquement les nouvelles coordonnées du point d'impact.

Comparer les valeurs déterminées aux résultats obtenus à la question 2.4.1.

3. MOUVEMENT D'UN SATELLITE DE LA TERRE

On étudie le mouvement dans le référentiel géocentrique, considéré comme galiléen, d'un satellite subissant comme force de gravitation uniquement celle de la Terre (supposée sphérique). La masse m du satellite est négligeable devant celle de la Terre.

3.1 Satellite en trajectoire circulaire plane

3.1.1 Mouvement en l'absence de tout frottement.

a. Montrer que la norme du vecteur vitesse v du satellite est constante et déterminer son expression en fonction de G , M et r rayon de l'orbite.

b. Cas d'un satellite géostationnaire.

- Rappeler les propriétés essentielles de son mouvement.
- Déterminer le rayon r_{sat} de la trajectoire en fonction de G , T et M .

c. Rappeler la définition de l'énergie mécanique (on la notera E).

Exprimer l'énergie mécanique (dans le référentiel géocentrique) d'un satellite en orbite circulaire quelconque en fonction de G , M , m et r rayon de l'orbite.

3.1.2 Freinage d'un satellite dans l'atmosphère

On suppose que le satellite subit dans les hautes couches de l'atmosphère une force de frottement f de la forme :

$$\mathbf{f} = -\alpha .m.v.\mathbf{v}$$

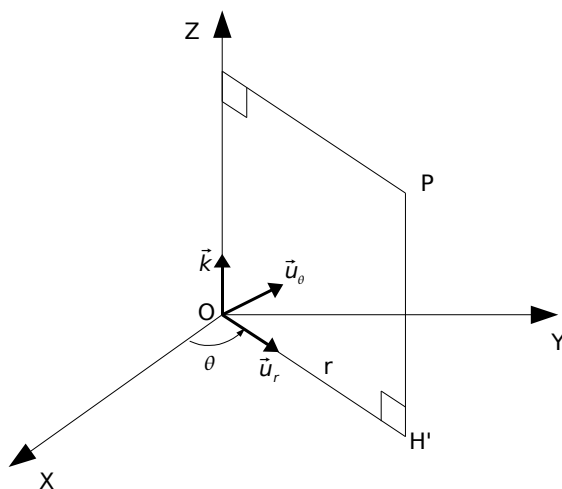
où α est une constante positive et v le module de la vitesse $\mathbf{v}$ du satellite.

Cette force étant très faible, la trajectoire pourra être considérée comme quasiment circulaire. Pendant une révolution, la variation Δr de la distance r au centre de la terre est alors très inférieure à r .

- Déterminer pour une révolution le travail W_f de la force de frottement en fonction de α , m , v et r .
- Idem pour la force de gravitation en fonction G , m , M , r et Δr .
- Déterminer l'énergie cinétique E_c du satellite. En déduire ΔE_c sachant que $\Delta r \ll r$.
- Montrer que $\Delta r = -4\pi r^2 \alpha$. Que peut-on conclure pour l'évolution du module v de la vitesse $\mathbf{v}$?
- Soit T_s la période de révolution du satellite. En assimilant $\frac{\Delta r}{T_s}$ à $\frac{dr}{dt}$, montrer que r suit une loi de la forme $\sqrt{r(t)} = Kt + \sqrt{r_0}$ où K est une constante à déterminer en fonction de α , G et M . (r_0 est la valeur de r à $t=0$).

3.2 Satellite en orbite élliptique

Le satellite placé en un point P est repéré dans le référentiel géocentrique par ses coordonnées cylindriques (r, θ, Z) dans la base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. On néglige tout frottement.



H' est la projection du point P sur le plan XOY, r est égal à la norme de $\vec{OH'}$ et θ l'angle entre l'axe $(\vec{OX})$ et $\vec{OH'}$.

Le repère (O, X, Y, Z) est fixe dans le référentiel géocentrique.

3.2.1 Montrer que le moment σ_o du satellite, calculé en O dans le référentiel géocentrique, est constant.

En déduire que le mouvement est plan. On prendra par la suite $Z=0$.

3.2.2 On montre que l'équation de la trajectoire du satellite dans le référentiel géocentrique est donnée dans le cas général par :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{où } p \text{ et } e \text{ sont des constantes.}$$

a. L'équation ci-dessus est celle d'une conique.

- ♦ Comment appelle-t-on p et e ?
- ♦ Quelle est la nature de la trajectoire du satellite ?
- ♦ Que peut-on dire de la valeur de e ?

b. Représenter l'allure de la trajectoire pour un satellite en faisant figurer r , θ , le centre O de la Terre, la force exercée sur le satellite. Placer les points P_A et P_P correspondant respectivement à l'apogée et au périégée. Définir et préciser sur le schéma ce qu'est le demi grand-axe noté a .

c. Soient v_A , r_A et v_P , r_P les valeurs de v et r respectivement à l'apogée et au périégée.

- ♦ Représenter sur le schéma du b. $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_P$.
- ♦ Etablir une relation entre v_A , r_A , v_P , r_P .

3.2.3 Energie mécanique E pour un satellite en orbite elliptique.

a. Rappeler son expression générale en fonction de G , m , M , r et v vitesse du satellite.

b. En considérant l'expression de l'énergie mécanique en A et en P, montrer que :

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

3.3 Changement d'orbite d'un satellite

On considère qu'un satellite a pour orbite initiale une trajectoire circulaire de rayon r_o . En un point I de la trajectoire, le satellite éjecte pendant une durée négligeable et dans un sens opposé à celui du vecteur vitesse une masse m_g de gaz. Ce gaz est éjecté avec une vitesse de module v_g par rapport au satellite.

On note v_o le module de la vitesse du satellite sur son orbite avant l'éjection du gaz et v' le module juste après l'éjection.

3.3.1 Exprimer v' en fonction de v_o , v_g , m_g et m la masse du satellite après éjection des gaz.

3.3.2 On considère que la nouvelle trajectoire est une ellipse.

- ♦ En quel point particulier de cette ellipse se trouve le point I ?
- ♦ Déterminer, en fonction de v' , r_o , G et M , le demi grand-axe a de cette ellipse.

3.3.3 Comment peut-on replacer le satellite sur une orbite circulaire ?

Déterminer son rayon en fonction de a et de r_o .

3.3.4 Pourquoi est-on obligé de modifier la trajectoire d'un satellite ?

Etude d'une éclipse - Extrait Capes interne 1998

Le 11 août 1999 une éclipse totale de soleil a été visible depuis le Nord de la France, événement rare (en France) mais non exceptionnel.

Ce problème se propose d'étudier quelques phénomènes relatifs au Soleil, à la Terre et à la Lune. Un certain nombre de données sont fournies au début du problème, elles pourront être utilisées au cours de la résolution du problème.

Certaines réponses sont fournies, elles pourront être admises même si les candidats n'ont pas résolu les questions correspondantes.

Toutes les parties sont, dans une très large mesure, indépendantes entre elles.

● **Constantes mathématiques :**

Conversion degré-radian

$$1^\circ = 0,01747 \text{ rad}$$

Conversion radian-degré ou minute

$$1 \text{ rad} = 57,256^\circ = 3437'747''$$

● **Constantes physiques :**

Vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 2,99793 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Constante de gravitation

$$g = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$$

Constante de Planck

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

Constante de Stephan

$$\sigma = 5,71 \cdot 10^{-8} \text{ W.K}^{-4}.\text{m}^{-2}$$

● **Constantes astronomiques :**

Masse de la Terre	$M_T = 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Masse de la Lune	$M_L = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Rayon équatorial de la Terre	$R_T = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$
Rayon de la Lune	$R_L = 1,740 \cdot 10^6 \text{ m}$
Rayon du soleil	$R_\odot = 6,960 \cdot 10^8 \text{ m}$
Distance moyenne Terre-Lune	$TL = d = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$
Distance moyenne Terre-Soleil	$ST = D = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Période de révolution de la Terre	$T_a = 1 \text{ an} = 365,25 \text{ jours}$
Période de lunaison	$T_L = 29,5 \text{ jours}$
Durée moyenne du jour terrestre	$T_t = 1j = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$

● **Constantes atomiques :**

Conversion unité de masse atomique/kg	$1u = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,00758 \text{ u}$
Masse de la particule α	${}^4_2\text{He} = 4,00276 \text{ u}$
Masse de l'électron (e^-) et du positon (e^+)	$m_e = 0,00055 \text{ u}$

PARTIE A

Définitions préliminaires

- A.1. Donner la définition d'une source de lumière primaire et celle d'une source de lumière secondaire. Chaque définition sera illustrée par un exemple.
- A.2. Comment se propage la lumière dans le vide ? Qu'appelle-t-on une année lumière ? Donner sa valeur dans une unité du Système International (SI).
- A.3. Qu'appelle-t-on le phénomène de dispersion de la lumière. Citer une observation, tirée de la vie quotidienne, illustrant ce phénomène.
- A.4. Distinguer le phénomène de réflexion de celui de diffusion.
- A.5. Définir l'ombre propre d'un objet et l'ombre portée de cet objet sur un écran. Définir l'ombre et la pénombre dans le cas d'une source de lumière étendue (faire un schéma).
- A.6. Pourquoi la Lune vue de la Terre présente-t-elle plusieurs phases ? Présenter sur une figure la position respective de la Terre, de la Lune et du Soleil dans les phases suivantes : NL (nouvelle Lune), PL (pleine Lune), PQ (premier quartier) et DQ (dernier quartier).
- A.7. Expliquer pourquoi on observe de temps en temps une éclipse de Soleil partielle ou totale et une éclipse de Lune. La réponse sera illustrée d'un ou plusieurs schéma(s). Pour cette

partie il est raisonnable de faire les figures en ne respectant pas les échelles des différents astres (diamètres et distances).

PARTIE B

Mesure des rayons des astres et des distances les séparant

- B.1.** Donner la définition du diamètre apparent d'un objet vu d'un point de l'espace.
- B.2.** Comment peut-on mesurer le diamètre apparent du Soleil et celui de la Lune vu d'un point de la surface terrestre ?
Avec les données astronomiques figurant au début du problème, calculer le diamètre apparent du soleil puis celui de la Lune.
Dans la suite du problème on prendra pour le Soleil et la Lune la même valeur $\alpha = 0,5^\circ = 30'$ d'arc, quelle est la conséquence de cette (quasi-) coïncidence sur les éclipses du Soleil ?
- B.3.** Comment la simple observation des éclipses de Lune a-t-elle permis de savoir dès le V^e siècle avant notre ère que la Terre était de forme sphérique ?
- B.4.** La première détermination du rayon de la Terre est due à Erastosthène. Il remarqua que le jour du solstice d'été, les puits de la ville de Syène étaient éclairés jusqu'au fond à midi. Sur le même méridien, à la même heure, à Alexandrie, distante de 800 km, l'obélisque laissait une ombre sur le sol, indiquant que les rayons solaires faisaient un angle de 7° avec la verticale du lieu.
Interpréter cette observation et montrer que effectivement on peut en déduire le rayon de la Terre.
(On fera l'hypothèse, pour résoudre cette question, que la distance Terre-Soleil est « quasiment infinie ».) Pourquoi est-il indispensable que les deux villes soient situées sur le même méridien ?
Faire l'application numérique.
- B.5.** Aristarque de Samos fit l'hypothèse que la Lune décrit autour de la Terre une orbite circulaire parcourue à une vitesse uniforme. Il constata qu'une éclipse de Lune avait une durée de 2 heures. Montrer que cette simple observation permet de déduire le rayon de la Lune, puis la distance Terre-Lune. (On pourra dans cette question faire l'hypothèse que le Soleil est infiniment éloigné de la Terre.)
- B.6.** La distance Terre-Soleil fut également déterminée par Aristarque de Samos. Il nota par T_1 l'intervalle de temps moyen (mesuré sur plusieurs années) entre le PQ (premier quartier) et le DQ (dernier quartier) puis par T_2 l'intervalle de temps moyen entre le DQ et le PQ. Il constata que $T_1 \neq T_2$. Expliquer pourquoi. Calculer alors $\Delta T = T_1 - T_2$. Faire l'application numérique avec les données de l'énoncé figurant en début du problème.

La précision obtenue à l'époque fut extrêmement médiocre, cette valeur fut cependant acceptée pendant 1500 ans !

Connaissez-vous d'autres méthodes pour déterminer la distance Terre-Soleil ?

PARTIE C

Etude du champ de gravitation

C.1. Rappeler le champ gravitationnel élémentaire $\vec{dG}$, créé par un élément de volume $d\tau$ portant une masse $dm = \mu d\tau$. (μ étant la densité volumique de masse).

C.2. La Terre et les différents astres du système solaire possèdent la propriété suivante : ce sont des sphères et leurs masses volumiques ne dépendent que de la distance r au centre de l'astre, on dit encore que l'astre est à symétrie sphérique. Montrer que le champ gravitationnel est radial et que sa norme ne dépend que de r .

Dans toute la suite du problème on admettra qu'une répartition de masse à symétrie sphérique crée en tout point extérieur un champ gravitationnel identique à celui d'un corps ponctuel de même masse et placé au centre de la distribution.

C.3. On considère deux masses m et M . M est un astre à symétrie sphérique de masse, qui est placé au point A ; m est une masse ponctuelle placée en B ; on note $\vec{AB} = r\vec{u}_r$.

a. Calculer le travail élémentaire (δW) de la force de gravitation exercée par M sur m , pour tout déplacement radial $\vec{dl} = dr\vec{u}_r$.

b. On définit l'énergie potentielle gravitationnelle (U) de la masse M en interaction avec la masse m par la relation $\delta W = -dU$. Calculer U . On choisira comme origine de l'énergie potentielle, la situation où les deux masses sont infiniment éloignées l'une de l'autre.

PARTIE D

Mouvement de la Lune par rapport à la Terre

Dans toute cette partie, on admettra que le centre de la Terre se confond avec le centre de masse du système Terre-Lune. Le référentiel géocentrique se confond avec le référentiel barycentrique du système Terre-Lune.

D.1. Énoncer les trois lois de Newton de la dynamique.

D.2. Définir le référentiel de Copernic. Définir de même le référentiel géocentrique.

D.3. La Lune et la Terre sont considérées comme des solides à symétrie sphérique de masse,

de centres L et T. On suppose que le centre de la Lune décrit une trajectoire circulaire de rayon d dans le référentiel géocentrique. En admettant que le référentiel géocentrique puisse être considéré comme galiléen à condition de négliger la force gravitationnelle que le Soleil exerce sur la Lune, trouver la relation entre d et la période de révolution de la Lune T_l .

D.4. En utilisant les données fournies par l'énoncé, déterminer numériquement T_l . Comparer cette période avec la période de lunaison T_L . Expliquer la différence. Retrouver par le calcul la valeur de T_L .

D.5. En réalité la trajectoire de la lune n'est pas réellement circulaire, mais elliptique ; on mesure alors les diamètres apparents de la Lune (vus du centre de la Terre), on trouve les résultats suivants :

minimum : $29',3$; maximum : $33',5$; moyenne : $31',4$.

Déterminer les distances extrémales entre le centre de la Lune et le centre de la Terre, correspondant à des points particuliers de la trajectoire de la Lune : le périégée, point le plus proche, et l'apogée, point le plus éloigné.

D.6. Déterminer les vitesses correspondantes au passage de l'aphélie et du périhélie.

D.7. Quelle est la conséquence de cette variation du diamètre apparent de la Lune, pour l'observation des éclipses de Soleil ?

D.8. On s'intéresse maintenant aux hypothèses effectuées dans la question D.3. (référentiel galiléen et force due au Soleil négligée).

a) Comparer la force gravitationnelle subie par la Lune ayant comme origine le Soleil, avec celle subie par la Lune ayant comme origine la Terre (on fera le calcul numériquement). Le résultat vous surprend-il ?

b) On se place dans le référentiel de Copernic et on étudie le mouvement de la Terre. Montrer que l'accélération de la Terre dans ce référentiel peut se mettre sous la forme :

$$\vec{a}(\text{Terre})_{\text{Copernic}} = \vec{G}_{ST} + \vec{G}_l$$

à condition de faire une hypothèse que l'on précisera. ($\vec{G}_{ST}$ et $\vec{G}_l$ représentent les champs gravitationnels subis par la Terre de la part du Soleil et de la Lune).

c) On admettra que l'accélération de la Lune dans le référentiel de Copernic est donnée par $\vec{a}(\text{Lune})_{\text{Copernic}} = \vec{a}(\text{Lune})_{\text{géocentrique}} + \vec{a}(\text{Terre})_{\text{Copernic}}$. Reprendre le calcul effectué en D.3. et justifier alors la méthode utilisée. (Pour faciliter cette étude on pourra

éventuellement se placer dans une situation où les trois astres sont alignés.)

Satellites artificiels – Extrait Capes externe 2002

A.I. ORBITES CIRCULAIRES

A.I.1. Définir le référentiel géocentrique. Indiquer l'intérêt de ce référentiel pour étudier le mouvement d'un satellite terrestre.

A.I.2.a) Dans l'approximation d'une répartition des masses à symétrie sphérique, donner l'expression du module du champ gravitationnel terrestre $g(r)$ à une distance r ($r > R_T$) du centre C de la Terre. On posera $g_o = g(R_T)$.

A.I.2.b) Exprimer en fonction de g_o , r et R_T la vitesse $v(r)$, évaluée dans le référentiel géocentrique, d'un satellite terrestre en orbite circulaire de rayon r .

A.I.2.c) En déduire la période $T(r)$ du mouvement du satellite.

A.I.2.d) Comparer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation d'un satellite en orbite circulaire.

A.I.3. On désigne par orbite basse une orbite dont l'altitude est faible devant le rayon terrestre. Evaluer numériquement la période et la vitesse d'un satellite décrivant une telle orbite. Que peut-on penser de la durée de vie d'un tel satellite?

A.I.4.a) Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire?

A.I.4.b) Dans quel domaine(s) d'application les satellites géostationnaires sont-ils particulièrement utiles ?

A.I.4.c) Déterminer le plan de l'orbite et calculer le rayon r_G de l'orbite d'un satellite géostationnaire.

A.I.4.d) Peut-on lancer un satellite géostationnaire de telle sorte qu'il reste à la verticale de Paris ?

A.I.4.e) Que peut-on répondre à un élève qui affirme :

- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est nulle parce qu'il est immobile ;
- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est infinie parce qu'il est immobile ;
- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est égale à 1 jour, soit $24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$;

- j'ai lu dans un site Internet que la période de révolution d'un satellite géostationnaire vaut 86164 s, mais je ne comprends pas pourquoi.

A.II. PROBLÈME DU TRANSFERT

On admettra que l'énergie mécanique d'un satellite en orbite elliptique est de la forme

$$E = -\frac{K}{a} \quad \text{où } a \text{ est le demi-grand axe de l'ellipse trajectoire et } K \text{ une constante dépendant de}$$

la masse de la Terre, de la masse du satellite et de G .

A.II.1. En identifiant cette expression avec celle de l'énergie d'un satellite en orbite circulaire, déterminer K .

A.II.2. On désire faire passer un satellite d'une orbite circulaire basse ($r \sim R_T$) dans le plan équatorial de la Terre à une orbite géostationnaire. Pour cela, on communique une brusque variation de vitesse $\Delta \vec{v}_B$ du satellite en un point B de l'orbite basse, afin que le satellite se trouve sur une orbite elliptique (orbite de transfert de Hohmann) tangente en B à l'orbite basse et tangente en un point H à l'orbite géostationnaire.

A.II.2.a) Faire un schéma soigné sur lequel on placera le centre C de la Terre, les trajectoires circulaires basse et géostationnaire et l'orbite de transfert.

A.II.2.b) Déterminer le demi-grand axe a de l'orbite de transfert.

A.II.2.c) Déterminer la variation de vitesse $\Delta \vec{v}_B$ (norme et direction) convenable.

A.II.2.d) Lorsque le satellite parvient au point H, on lui communique une nouvelle brusque variation de vitesse $\Delta \vec{v}_H$ afin qu'il passe de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire. Déterminer la variation de vitesse $\Delta \vec{v}_H$ (norme et direction) convenable.

A.II.3. Les variations de vitesse Δv_B et Δv_H sont obtenues par la mise en action d'un moteur qui éjecte des produits de combustion avec une vitesse relative d'éjection u et un débit massique D (voir question B.II.1.). Si m_B et m_H sont respectivement la masse du satellite en orbite basse, et sur l'orbite de transfert, on montre que

$$\Delta v_B = u \ln \frac{m_B}{m_H} \quad ; \quad \Delta v_H = u \ln \frac{m_H}{m_G}$$

Déterminer le rapport m_G / m_B .

Application numérique: $m_G = 1000 \text{ kg}$; $u = 3000 \text{ m/s}$. Quelle masse m_B faut-il satelliser en orbite basse ?

A.II.4. En pratique, l'orbite elliptique de transfert fait passer d'une orbite circulaire d'altitude 200 km à l'orbite géostationnaire. Pourquoi ne choisit-on pas une orbite circulaire basse d'altitude inférieure ?

A.III. FROTTEMENTS

A.III.1.a) Pour un satellite en orbite basse elliptique, justifier que c'est au voisinage du périée que les frottements sont les plus intenses.

A.III.1.b) On modélise les effets des frottements par une diminution de vitesse au passage au périée.

Montrer qualitativement que ce modèle conduit à une circularisation progressive de la trajectoire elliptique.

A.III.2.a) Pour un satellite en orbite quasi-circulaire, montrer par un bilan énergétique que les frottements aérodynamiques ont pour effet paradoxal d'accroître la vitesse.

A.III.2.b) N'y a-t-il pas contradiction entre ce résultat et celui de la question A.III.1.b ? Commenter.

B. Propulsion par réaction

B.I. Préambule

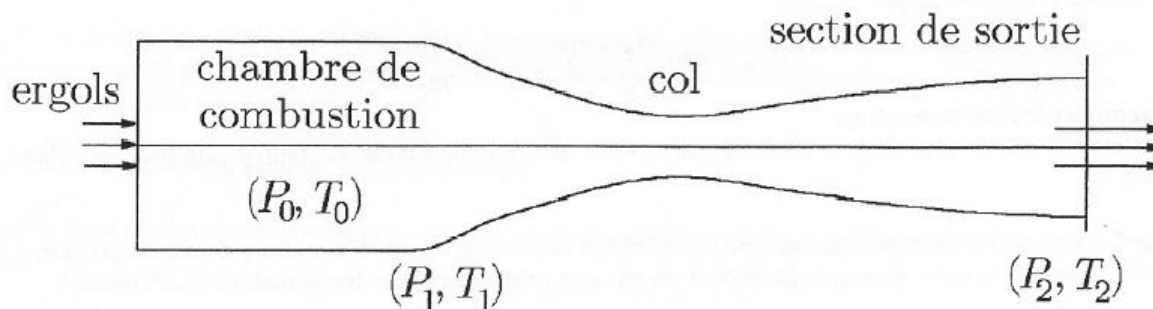
B.I.1. On réalise l'expérience suivante : on gonfle un ballon de baudruche, puis on le lâche. Expliquer l'origine du mouvement du ballon et le caractère désordonné de sa trajectoire.

B.I.2. On réalise une minifusée de la façon suivante : on prend une bouteille de plastique vide et on remplace le bouchon par un joint torique ; on introduit un gonfleur pour augmenter la pression de l'air à l'intérieur de la bouteille. Lorsque la pression dépasse 5 bars, la bouteille décolle. Expliquer pourquoi la fusée monte beaucoup plus haut lorsqu'elle contient partiellement de l'eau.

B.II. Etude du mouvement d'une fusée : ordres de grandeur

B.II.1. Une fusée de masse $m(t)$ éjecte avec un débit massique D supposé constant des gaz brûlés, avec une vitesse $\vec{u}$ par rapport au référentiel de la fusée. En faisant un bilan de quantité de mouvement pour le système mécanique constitué par la fusée à l'instant t , montrer que l'éjection des gaz se traduit par une force de poussée $\vec{F} = -D\vec{u}$. Déterminer u pour un moteur cryotechnique hydrogène liquide-oxygène liquide de poussée 63 kN consommant 11,9 tonnes d'ergol en 780 s.

B.II.2. On se propose de déterminer l'ordre de grandeur de u en faisant une étude sommaire du moteur. On peut le considérer comme constitué d'une chambre de combustion suivie d'une tuyère (voir schéma).



B.II.2.a) On supposera que les turbo-pompes amènent l'oxygène et l'hydrogène dans la chambre de combustion à l'état gazeux et à une température de l'ordre de 298 K, dans les proportions stoechiométriques. Tous les constituants gazeux seront considérés comme parfaits et la combustion isobare et adiabatique. Déterminer la température de flamme dans ces conditions.

On donne

- l'enthalpie molaire de formation de l'eau à l'état vapeur à 298 K :

$$\Delta_{\text{formation}} H^0 = -246 \text{ kJ/mol}$$

- la capacité thermique molaire à pression constante de l'eau à l'état vapeur :

$$C_p = 30,54 + 10,29 \times 10^{-3} T \quad \text{J.K}^{-1}.\text{mol} ; \quad (T \text{ en K})$$

En réalité, l'hydrogène est injecté en excès; quelles en seront les principales conséquences ?

B.II.2.b) Les gaz brûlés sortant de la chambre de combustion sont évacués par une tuyère dans laquelle ils n'échangent aucun travail autre que celui des forces de pression, ni énergie thermique avec le milieu extérieur. On suppose l'écoulement permanent et unidimensionnel. Montrer qu'entre l'entrée et la sortie de la tuyère, une mole de gaz brûlé vérifie la relation

$$h_1 + \frac{1}{2} M u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} M u_2^2$$

où h est l'enthalpie molaire, M la masse molaire et u la vitesse moyenne.

B.II.2.c) Justifier que l'écoulement peut être considéré comme isentropique.

En négligeant u_1 , calculer u_2 en fonction de T_1 , P_1 , P_2 , γ ($\gamma = C_p/C_v$), M .

A.N. : $T_1 = 3500 \text{ K}$, $M = 12 \text{ g/mol}$; $\gamma_{\text{moyen}} = 1,2$; $P_1 = 35 \text{ bar}$; $P_2 = 50 \text{ hPa}$.

B.II.2.d) Pour l'étage principal de ARIANE 5, la documentation technique du moteur VULCAIN indique les caractéristiques suivantes :

- masse d'oxygène liquide: LOX (125 tonnes);
- masse d'hydrogène liquide: LH2(25 tonnes) ;
- poussée 850 kN au décollage, 1150 kN en croisière, durée de fonctionnement 10 min.

Vérifier si ces indications sont en concordance avec le modèle simple utilisé.

Justifier la différence entre la poussée au décollage et la poussée en croisière.

Pourquoi la documentation technique indique-t-elle une masse molaire moyenne de 12 g/mol ?

B.III. Nécessité d'une fusée à plusieurs étages

Dans les questions suivantes, l'étude du mouvement de la fusée sera fait. dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

La mission d'un lanceur de satellite géostationnaire est d'amener le satellite à avoir une vitesse d'environ 10,5 km/s à un périégée situé à une altitude de 200 km.

B.III.1. En négligeant les frottements de l'air et en supposant le vol horizontal, montrer que la vitesse de la fusée augmente d'une quantité ΔV appelée " ΔV propulsif " telle que

$$\Delta \vec{V} = -\ln(M_i/M_f)\vec{u}$$

avec :

$\vec{u}$ vitesse d'éjection des gaz supposée constante

M_i masse initiale de la fusée

M_f masse finale de la fusée qui comprend

- la masse du satellite (masse utile)
- la masse " sèche " de la fusée, c'est-à-dire la masse de la fusée vide d'ergols, la masse des ergols et fluides résiduels.

Déterminer la distance parcourue par la fusée pendant la combustion des ergols.

On rappelle que

$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

B.III.2. Montrer que la mission ne peut pas être assurée par une fusée à un seul étage ayant les caractéristiques du premier étage d'ARIANE 4 : masse d'ergols 229 tonnes, durée de fonctionnement 210 s, poussée 2700 kN, masse sèche 18 tonnes, masse utile 1 tonne.

Justifier qualitativement la nécessité d'une fusée à plusieurs étages, sachant que la

satellisation nécessite une variation de vitesse de 8000 m/s.