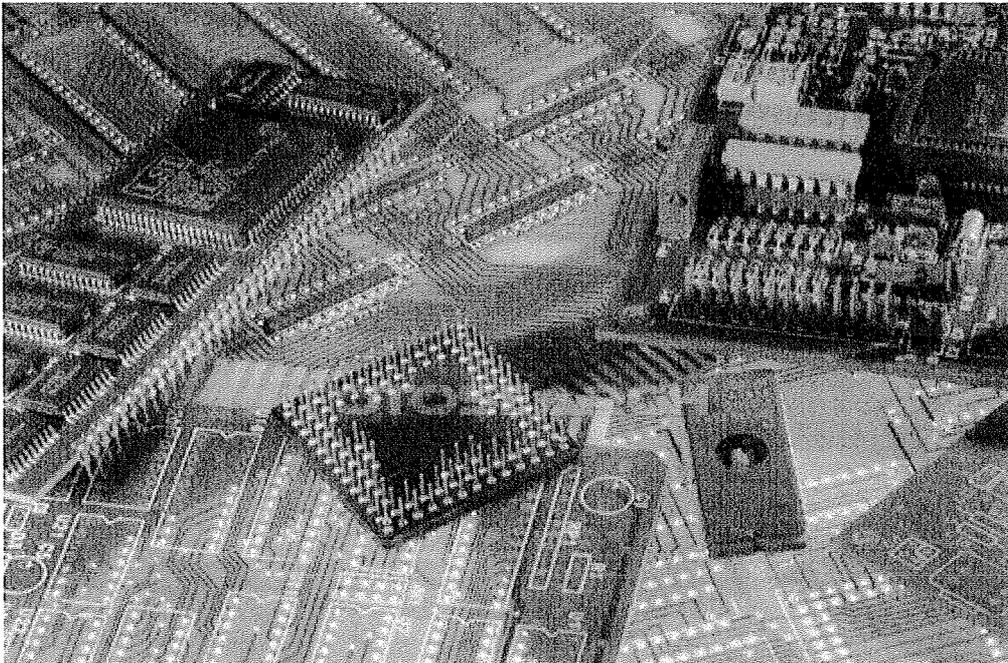


# PREPARATION AU CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES ELECTRONIQUE

MASTER 2



## PHOTO-ELEMENTS

### Exercice 1 : Caractéristique d'une photodiode.

La caractéristique d'une diode classique est modélisable par :

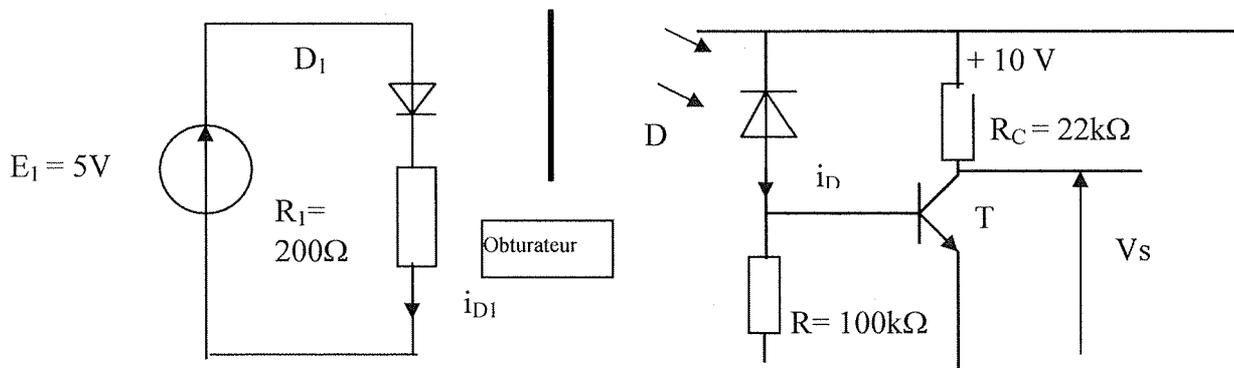
$$I_{AK} = I_S \left( \exp \frac{qV_{AK}}{k_B T} - 1 \right) \text{ où } k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Sommairement une photodiode est une diode, sur le boîtier de laquelle on a pratiqué une fenêtre permettant d'éclairer la jonction et de libérer par éclairement des paires électrons – trous. Cette diode est utilisée **en inverse** sinon le photo-courant créé serait négligeable devant le courant des porteurs majoritaires.

Si  $\phi$  est la puissance lumineuse reçue, 
$$I_{AK} = I_S \left( \exp \frac{qV_{AK}}{k_B T} - 1 \right) - K\phi \text{ où } k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

- Si  $K = 0,3 \text{ A/W}$ , et  $I_S = 50 \text{ nA}$ , calculez  $I_{AK}$  pour différentes valeurs de  $V_{AK}$  pour un éclairement de 0 lux, 200 puis 400 lux (1 lumen/m<sup>2</sup> = 1 lux = 1,5 .10<sup>-3</sup> W/m<sup>2</sup>) avec une surface de jonction de 1mm<sup>2</sup> à 25° C.
- Tracer l'allure des caractéristiques à  $\phi$  variable (on remarquera que pour  $U_{AK} > 0$  et  $I_{AK} < 0$  on obtient la caractéristique de la photopile).
- Que vaut le courant d'obscurité  $i_0$  ?
- La photodiode est insérée dans un montage comprenant un générateur de  $E = 10 \text{ V}$  et une résistance de protection  $R = 1 \text{ M}\Omega$ , quelle est la valeur du point de fonctionnement pour un flux  $\phi_0 = 400 \text{ lux}$  ?

### Exercice 2 : Principe d'une fourche optique ou d'un opto-coupleur.



$D_1$  est une diode infra-rouge, considérée sans résistance dynamique, de seuil 1,2V .

Le flux émis par cette diode crée un photo-courant dans D tel que  $i_D = i_{D1}/1000$ .

Ce flux peut être ou non transmis à la photodiode grâce à un obturbateur (bille en chute libre, disque en rotation).

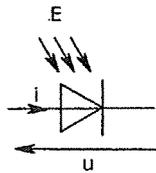
- Calculez  $i_{D1}$ .
- Montrez que le transistor T bipolaire au silicium ( $\beta = 100$ ) sera en régime de commutation.
- Indiquez l'état de  $V_S$  en fonction de l'éclairement de la photodiode.

### Exercice 3 : Extraits du Capes interne 2009.

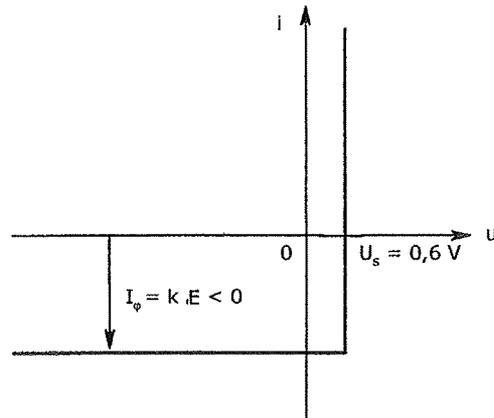
#### II.2. Détection du signal lumineux

La barrette de diodes du capteur est constituée de photodiodes.

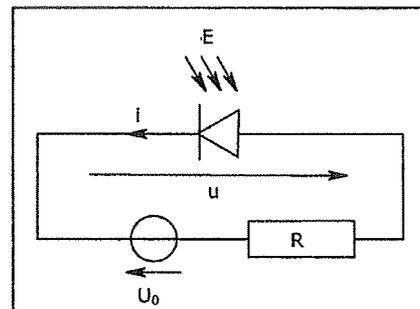
La figure ci-contre présente une modélisation très simple de la caractéristique tension-courant d'une photodiode pour la convention suivante :



L'intensité  $I_p < 0$ , appelée courant inverse, est proportionnelle à l'éclairement  $E$  qui irradie la photodiode.



Pour utiliser la photodiode en capteur, on l'alimente de manière à ce qu'elle soit polarisée en inverse ( $u < 0$ ;  $i < 0$ ). Le circuit est représenté sur la figure ci-contre.



- Reproduire sur la copie l'allure de la caractéristique de la diode. Superposer la caractéristique  $i(u)$  du générateur de Thévenin ( $U_0, R$ ) branché aux bornes de la diode de manière à ce que le point de fonctionnement du circuit soit bien dans la zone de polarisation de la diode. (On respectera les conventions de la figure)
- Montrer que, pour que la diode fonctionne bien en polarisation inverse, la résistance  $R$  doit être inférieure à une valeur limite  $R_{lim}$  que l'on exprimera en fonction des données ( $U_0, k, E$ ).
- Déterminer la valeur numérique de  $R_{lim}$  pour un éclairement  $E$  de  $0,20 \text{ mW.cm}^{-2}$ .

**Données :**

$$k = 50 \mu\text{A.mW}^{-1}.\text{cm}^2$$

$$U_0 = 5,0 \text{ V}$$

## Exercice 4 : Extrait du capes externe 2009

### C- Unité de cellules photovoltaïques

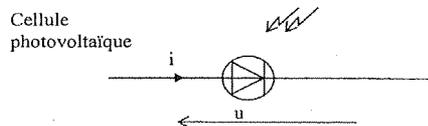
Une autre utilisation de l'énergie solaire est la production d'énergie électrique par des cellules photovoltaïques. Cette partie étudie le fonctionnement d'un ensemble de cellules pouvant venir en complément des dispositifs déjà étudiés. L'énergie pourra être stockée dans des batteries d'accumulateurs et restituée à une installation domestique par l'intermédiaire d'un onduleur.

#### I- Cellules photovoltaïques

Le comportement d'une cellule photovoltaïque est bien représenté par la fonction caractéristique

$$i = I_s \left( \exp\left(\frac{u}{U_0}\right) - 1 \right) - \alpha S E$$

avec  $I_s = 0,10 \text{ nA}$  ;  $U_0 = 25,8 \cdot 10^{-3} \text{ V}$  ;  $S = 12 \text{ cm}^2$  et  $\alpha = 0,35 \text{ A.W}^{-1}$  où  $\alpha$  est le coefficient représentant les pertes,  $S$  la surface de la cellule et  $E$  l'éclairement solaire.



C.I.1. Lorsque le flux solaire est maximal, l'éclairement vaut  $E_1 = 800 \text{ W.m}^{-2}$  ; par ciel voilé l'éclairement vaut  $E_2 = 300 \text{ W.m}^{-2}$  et par temps gris,  $E_3 = 100 \text{ W.m}^{-2}$ . Calculer la tension aux bornes d'une cellule quand elle n'est pas branchée ( $i = 0$ ) pour les trois éclairements  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ . On notera  $U_{C1}$ ,  $U_{C2}$  et  $U_{C3}$  ces trois tensions à vide.

C.I.2. Calculer numériquement le courant de court-circuit  $i_{cc}$  pour les trois éclairements, on les notera  $i_{cc1}$ ,  $i_{cc2}$  et  $i_{cc3}$ .

C.I.3. Tracer l'allure des trois caractéristiques sur lesquelles on fera apparaître les points remarquables.

C.I.4. Calculer la puissance fournie  $P_u$  par la cellule.

Pour la suite, on envisagera le cas où le flux solaire est maximal  $E_1 = 800 \text{ W.m}^{-2}$ .

C.I.5. On cherche les conditions pour que la puissance  $P_u$  soit maximale. On admettra que dans ces conditions on a :  $\exp\left(\frac{u}{U_0}\right) \gg 1$ . Etablir la relation permettant

de calculer  $u_{\text{Max}}$ , valeur de  $u$  lorsque  $P_u$  est maximale. Par une méthode numérique, on trouve  $u_{\text{Max}} = 0,490 \text{ V}$ . Calculer la valeur de l'intensité  $i_{\text{Max}}$  correspondante. On branche aux bornes de la cellule une résistance  $R$ . Quelle valeur faut-il donner à la résistance  $R$  pour que ces conditions soient réalisées ?

Page 8 sur 11

C.I.6. On définit le rendement  $\eta$  de la cellule comme étant le rapport de la puissance maximale sur la puissance solaire reçue par toute la surface de la cellule. Ecrire l'expression de  $\eta$ . Faire l'application numérique. Commenter.

Dans le but d'améliorer les performances du dispositif, on cherche à associer les cellules en série et en parallèle.

C.I.7. On met en parallèle  $n_p$  branches identiques constituées de  $n_s$  cellules en série. On prendra  $n_s = 50$  et  $n_p = 25$ . Exprimer la tension  $V_D$  aux bornes du système et l'intensité  $I_D$  qui le traverse si chaque cellule fournit sa puissance maximale. Effectuer les applications numériques.

C.I.8. Déterminer numériquement la valeur  $R_M$  de la résistance à brancher aux bornes du capteur solaire ainsi constitué pour que la condition de puissance maximale soit réalisée.

C.I.9. On suppose maintenant que le capteur solaire n'alimente plus une résistance mais charge une batterie de résistance interne négligeable de  $24 \text{ V}$ . Quelle est la tension observée aux bornes de chaque cellule ? Quel courant traverse alors une cellule et la batterie ? Effectuer les applications numériques.

## Extrait d'agrégation interne 2006 ( cf sujet d'optique)

### I Détection et traitement du signal

Le photomultiplicateur placé au foyer de la lentille dans le montage du Michelson transforme le flux lumineux qu'il reçoit en signal électrique. Cette partie propose un système de traitement du signal permettant la détermination des fréquences  $\nu_0$  et  $\Delta\nu$ .

- I. 1. Du point de vue électrique, le photomultiplicateur (noté PM sur la Fig. 4) se comporte comme une source de courant  $i(t)$  en parallèle avec un condensateur de capacité  $C_0 = 15$  pF. Afin de prélever une tension  $u(t)$  proportionnelle à ce courant, on charge le photomultiplicateur par une résistance  $r = 50$   $\Omega$  (Fig. 4).
  - I. 1. a. On étudie la réponse de ce système à un échelon de courant : la source idéale de courant délivre une intensité  $I$  constante à partir de l'instant  $t = 0$ . Établir l'équation différentielle déterminant  $u(t)$ .
  - I. 1. b. Résoudre cette équation en considérant la condition initiale  $u(0) = 0$  et évaluer  $t_R$ , le temps de réponse à 5 % du photomultiplicateur.
  - I. 1. c. Le chariot du Michelson portant le miroir  $M_2$  se déplace à une vitesse constante  $v$  telle que  $e(t) = vt$ . La source de courant délivre un courant  $i(t)$  proportionnel à l'éclairement  $E(t)$  que le détecteur reçoit. Montrer que pour des temps d'évolution très supérieurs à  $t_R$ , la tension  $u(t)$  reproduit les variations de l'éclairement.
2. Les signaux détectés par le photomultiplicateur sont faibles, noyés dans des bruits aussi bien continus qu'alternatifs. La transmission de l'information s'accompagne de parasites et nous considérerons qu'en pratique, un signal parasite existe identiquement sur les fils de liaison de résistance nulle notés [1] et [2]. Le signal du photomultiplicateur a besoin d'être conditionné.

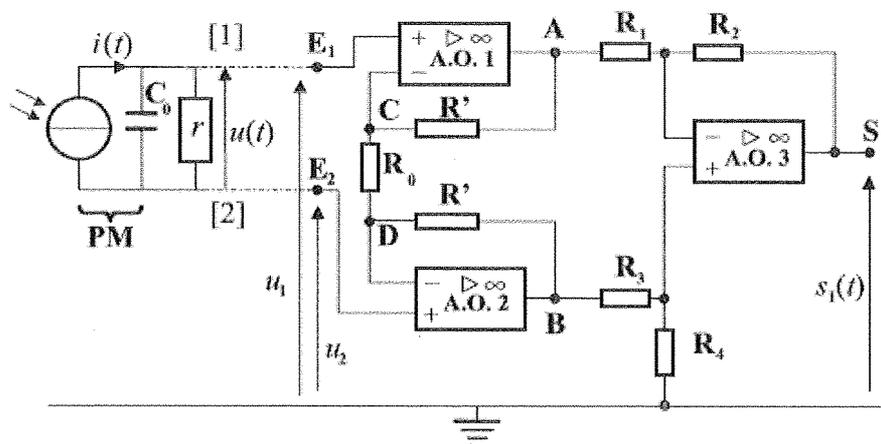


FIG. 4 -

Les amplificateurs opérationnels (notés A.O. sur les Fig. 4 et 5) utilisés sont supposés idéaux. Si un amplificateur fonctionne dans les conditions de saturation, on notera la tension de saturation  $V_{sat}$  et on prendra  $V_{sat} = 15$  V.

- I. 2. a. Exprimer la différence de potentiel entre les points A et B de la Fig. 4,  $u_A(t) - u_B(t)$ , en fonction de la différence de potentiel entre les points [1] et [2],  $u_1(t) - u_2(t) = u(t)$ .
- I. 2. b. Quelles conditions doivent satisfaire les résistances  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$  pour que le signal  $s_1(t)$  soit proportionnel à  $u(t)$ ? Ces conditions seront respectées par la suite.
- I. 2. c. Quelles sont les fonctions de chacun des amplificateurs opérationnels de la Fig. 4? Quel est l'intérêt d'un tel montage?
3. Après conditionnement, le signal est traité par le montage de la Fig. 5.
  - I. 3. a. Expliquer la fonction de l'A.O.4 dans le montage.

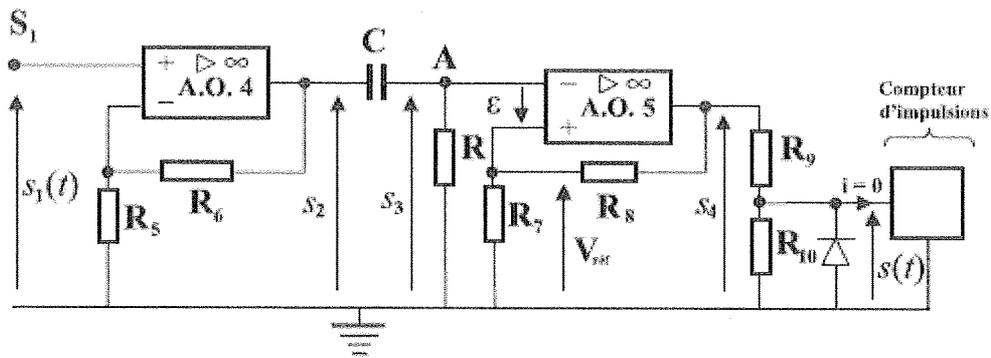


FIG. 5 -

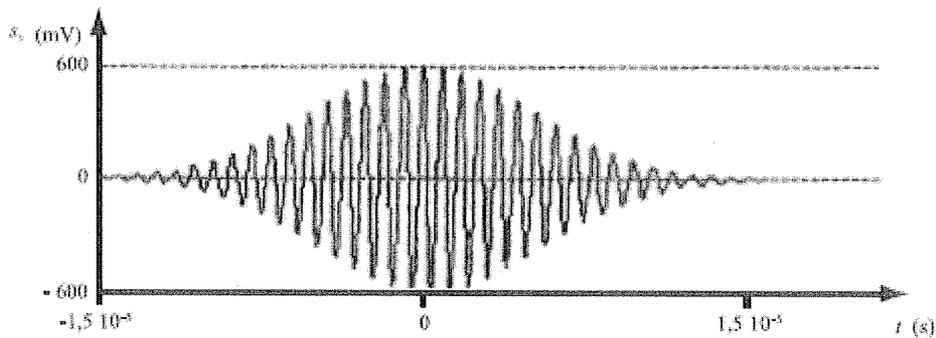


FIG. 6 -

- I. 3. b. Le signal  $s_3(t)$  est observé à l'oscilloscope, on obtient le tracé de la Fig. 6.  
 Quel est l'intérêt du dispositif permettant de passer du signal  $s_2(t)$  au signal  $s_3(t)$ ?  
 Comment choisir le produit RC pour obtenir le meilleur résultat?
- I. 3. c. Expliquer de manière détaillée le fonctionnement de l'A.O.5. On prendra  $R_8 = 100 R_7$ .
- I. 4. Le compteur d'impulsions placé en fin de montage fonctionne avec une tension d'entrée voisine de 5 V et l'intensité de son courant d'entrée est nulle. La diode est idéale, de tension de seuil nulle et de résistance nulle dans le sens passant. Les résistances  $R_9$  et  $R_{10}$  vérifient la relation  $R_9 = 2 R_{10}$ . Expliquer le rôle joué par la diode dans l'évolution de  $s(t)$  au cours du temps et tracer sur le même graphique l'allure des oscillogrammes  $s_4(t)$  et  $s(t)$ .
- I. 5. Entre deux annulations du facteur de visibilité, le nombre d'impulsions affiché par le compteur est  $N = 4164$  pour une durée de comptage  $2\tau = 3 \times 10^{-5}$  s correspondant à un déplacement  $e = 0,2721$  mm. Calculer la valeur des fréquences  $\nu_0$  et  $\Delta\nu$ .

**B.II Étude d'un générateur de balayage**

Le faisceau d'électrons est focalisé par une lentille magnétique en un point de l'échantillon à analyser. Afin de réaliser une image complète de celui-ci, il est nécessaire de dévier le faisceau afin que le point de focalisation balaye sa surface. Dans le microscope électronique à balayage, cette opération est réalisée soit par une bobine de déflexion, soit par des paires de plaques. Ces dispositifs sont commandés par un signal « en rampes » fourni par un générateur de balayage. Ce signal sert aussi à synchroniser l'affichage de l'image, sur un écran cathodique par exemple.

On se propose d'analyser le fonctionnement d'un générateur de rampes représenté sur la figure 7. Les seules sources sont les alimentations continues  $\pm V_0$  des amplificateurs opérationnels et ne sont pas représentées ; on prend  $V_0 = 15\text{ V}$ .

On utilisera dans la suite la notation  $V_M$  pour désigner le potentiel en un point  $M$ .

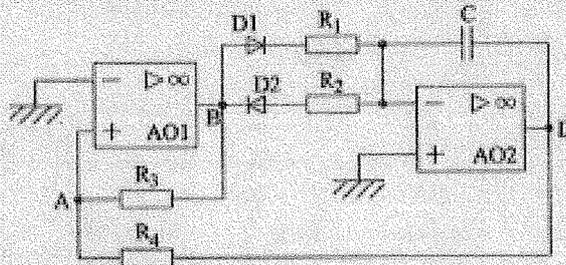


fig. 7 - Générateur de rampes à amplificateurs opérationnels

**B.II.1** Chaque diode et chaque amplificateur opérationnel (AO en abrégé) est supposé idéal dans le montage de la figure 7.

**B.II.1.a** Tracer la caractéristique  $i = f(U)$  d'une diode idéale en convention récepteur ; on précisera sur un schéma les orientations choisies pour  $i$  et  $U$  (la tension de seuil est supposée nulle dans la modélisation).

**B.II.1.b** On note  $e = V_+ - V_-$  la tension différentielle d'entrée d'un AO et  $V_s$  sa tension de sortie. Tracer la caractéristique  $V_s = f(e)$  d'un AO idéal et préciser dessus les régimes de fonctionnement.

**B.II.1.c** Que peut-on dire des courants arrivant aux entrées inverseuse et non inverseuse d'un AO idéal ?

**B.II.1.d** Qu'appelle-t-on diviseur de tension ? Énoncer et démontrer la formule du diviseur de tension.

**B.II.1.e** Montrer que le potentiel  $V_A$  vérifie l'équation

$$V_A = \frac{R_3 V_D + R_4 V_D}{R_3 + R_4} \tag{4}$$

**B.II.2** Justifier simplement que l'AO1 du montage fonctionne en régime saturé et que l'AO2 fonctionne en régime linéaire.

**B.II.3** Reconnaissez-vous des blocs dans le montage ? Poursuivez-vous en déduire qualitativement le fonctionnement du dispositif (ou précisez la nature des évolutions de  $V_D$  et  $V_D$ ).

**B.II.4** On s'intéresse à une phase de fonctionnement du montage pendant laquelle l'AO1 est en sortie haute :  $V_D = V_0$  pour  $0 \leq t < t_1$ .

**B.II.4.a** Montrer que la diode D1 est passante et que la diode D2 est bloquée. En déduire que

$$V_s = -R_2 C \frac{dV_D}{dt}$$

**B.II.4.b** Initialement, le condensateur est déchargé. Que vaut  $V_D(t = 0^+)$ ? Trouver la loi d'évolution  $V_D(t)$  pour  $0 \leq t < t_1$ .

**B.II.4.c** Exprimer  $V_A(t)$ . À quelle condition, portant sur  $R_3$  et  $R_4$ , l'A01 peut-il basculer à un instant  $t_1$  en sortie basse? Ou suppose cette condition validée dans le montage. Exprimer l'instant  $t_1$  de basculement.

**B.II.5** On s'intéresse à la phase suivante de fonctionnement du montage, après l'instant  $t_1$ .

**B.II.5.a** Montrer qu'à présent la diode D1 est bloquée et que la diode D2 est passante. En déduire que

$$V_0 = R_2 C \frac{dV_D}{dt} \quad (5)$$

**B.II.5.b** Trouver la loi d'évolution  $V_D(t)$  après l'instant  $t_1$  et déterminer l'instant  $t_2$  de basculement de l'A01.

**B.II.5.c** Montrer que le montage produit en régime établi des signaux périodiques de fréquence

$$f = \frac{1}{2C(R_1 + R_2)} \frac{R_3}{R_4} \quad (6)$$

**B.II.6** Les figures 8, 9 et 10 sont des impressions d'écran d'oscilloscopes (pour diverses bases de temps) de ce qu'un élève a obtenu en séance de travaux pratiques pour le signal  $V_D(t)$ .

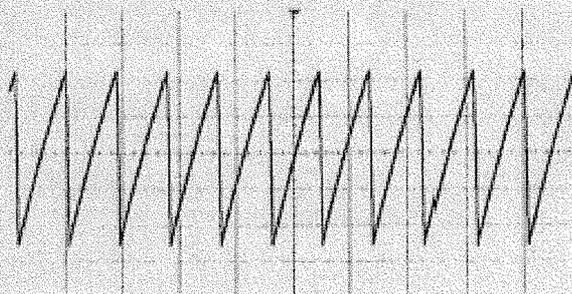


Fig. 8 - Signal  $V_D(t)$  pour 5 V/div et 20 ms/div

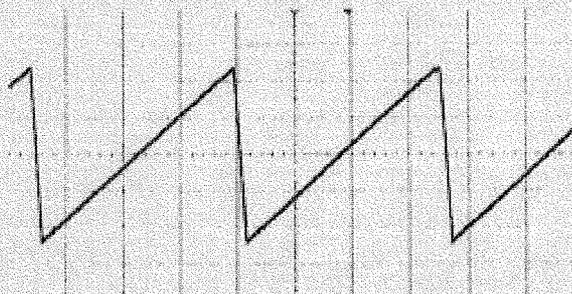


Fig. 9 - Signal  $V_D(t)$  pour 5 V/div et 5 ms/div

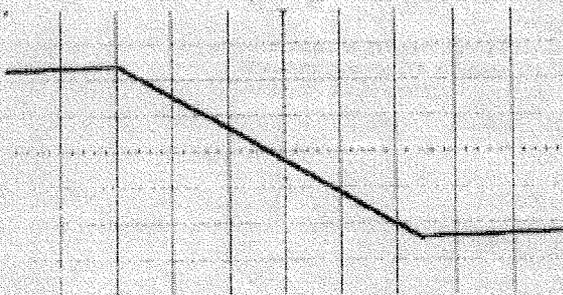


Fig. 10 - Signal  $V_D(t)$  pour 5 V/div et 200 μs/div

**B.II.6.a** Sachant que  $V_0 = 15$  V,  $R_1 = 82$  kΩ et  $C = 0,1$  μF, déterminer à partir des tracés les valeurs des résistances  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$ .

**B.II.6.b** Lors de la séance de travaux pratiques, l'élève avait à sa disposition pour réaliser  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  des résistances pour lesquelles les deux chiffres significatifs ne peuvent faire partie que des valeurs suivantes : 10, 18, 27, 39 et 62 (partie de la série normalisée E24).

Déterminer pour chaque résistance  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ , la valeur la plus probable utilisée par l'élève.

## Extrait de capes externe 2010

### Partie B — Utilisation télémétrique de la paire de jumelles

Formulaire

$$\begin{aligned}\cos(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \cos(a+b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)\end{aligned}$$

#### **B.I Télémétrie visuelle**

Certaines paires de jumelles sont équipées d'un réticule gradué permettant des mesures de distances longitudinales ou transversales (voir figure 5).

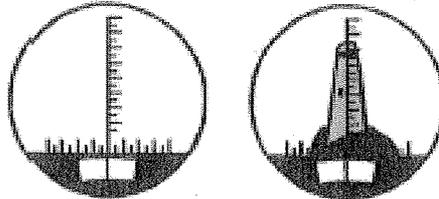


FIGURE 5 – Le phare d'Eckmühl vu depuis la mer

**B.I.1** En considérant la paire de jumelles comme une simple lunette astronomique réglée de manière afocale, où doit être placé le réticule ?

**B.I.2** La notice de la paire de jumelles précise son « champ de vision », qui est de 127 m à 1 000 m. Calculer en degré la largeur angulaire correspondante. Quel nom la notice donne-t-elle à cette information ? On pourra se référer au tableau 1 de la partie A.

**B.I.3** Sur la représentation de la figure 5, le phare d'Eckmühl occupe les deux tiers du champ de vision. Sachant qu'il culmine à 60 m, en déduire la distance qui sépare le bateau du phare.

*La numérotation associée aux graduations du réticule est volontairement absente de la représentation. Sa présence facilite évidemment ces mesures qui, sur certains modèles, sont automatiques et affichées numériquement.*

#### **B.II Télémétrie automatique**

Certaines paires de jumelles sont équipées d'un télémètre. Nous évoquerons ici, pour simplifier, un télémètre à ondes sonores, dont le principe peut être abordé en lycée. Toutefois, le fonctionnement des télémètres réels est différent et sera évoqué en conclusion.

##### **B.II.1 Généralités sur les ondes sonores**

**B.II.1.a** À qui attribue-t-on la paternité de l'équation de propagation des ondes ? Quelle est sa signification ? Que transporte une onde ?

**B.II.1.b** Quelle est la nature de l'onde lumineuse émise par un Laser ? Quelle est sa célérité dans l'air ? Quelle est la nature d'une onde sonore ? Quelle est sa célérité dans l'air dans les conditions habituelles ?

**B.II.1.c** Décrire l'expérience dite de la « cloche à vide ». Quelle propriété des ondes sonores met-elle en évidence ? Les ondes lumineuses possèdent-elles la même propriété ? Justifier à l'aide de l'expérience de la « cloche à vide ».

### B.II.2 Le principe de fonctionnement du télémètre

Pour réaliser le télémètre, on place un émetteur et un récepteur à ultrason côte à côte. Ce bloc est appelé le télémètre. À la distance  $D$ , on place un obstacle réfléchissant les ondes sonores, que nous appellerons la cible. Une onde sinusoïdale, de période  $T$ , est émise par l'émetteur du télémètre, elle se réfléchit sur la cible et est détectée par le récepteur du télémètre.

Sur l'écran d'un oscilloscope, on visualise simultanément deux signaux ; celui capté (par un dispositif non décrit) en sortie de l'émetteur et celui du récepteur.

**B.II.2.a** On appelle temps de vol, noté  $t_v$ , la durée du trajet aller-retour de l'onde entre le télémètre et la cible. Exprimer  $t_v$  en fonction de la distance  $D$  séparant le télémètre de la cible et de la célérité  $c$  de l'onde.

**B.II.2.b** Pour illustrer le principe de la mesure, on colle la cible au télémètre, puis on l'éloigne lentement, en comptant le nombre de coïncidences, c'est-à-dire le nombre de fois où les signaux sont en phase. Pour simplifier, on suppose que lorsque  $D = 0$ , les signaux sont en phase. On se place dans le cas où l'on a compté exactement un nombre  $n$  de coïncidences. Exprimer  $D$  en fonction de  $n$  et de la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes ultrasonores.

**B.II.2.c** Lors du recul de la cible, 50 coïncidences ont été comptées avant d'observer les signaux suivants sur l'écran de l'oscilloscope (voir figure 6). Dans les conditions de l'expérience, la longueur d'onde des ondes sonores valait 8,5 mm. En exploitant les données de l'enregistrement, calculer la distance séparant le télémètre de la cible.

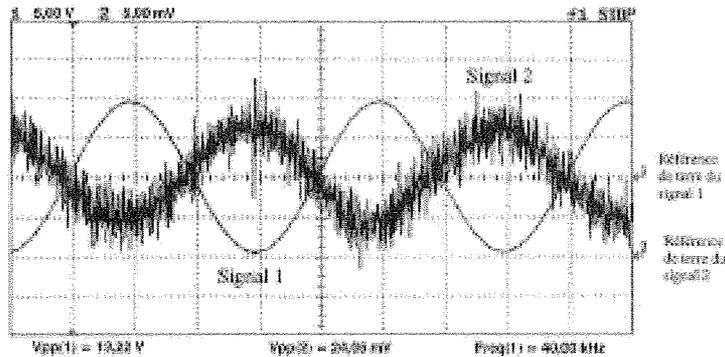


Figure 6 – Signaux électriques issus du télémètre

**B.II.2.d** Pourquoi les deux signaux de la figure 6 sont-ils si différents ? Identifier quel est, selon toute vraisemblance, le signal capté en sortie de l'émetteur et celui reçu par le récepteur.

**B.II.2.e** Préciser ce que sont les modes  $ac$  et  $bc$  de l'oscilloscope. Lors de l'enregistrement présenté sur la figure 6, les deux voies de l'oscilloscope étaient toutes deux réglées sur le même mode. Justifier de quel mode il s'agit.

**B.II.2.f** Le comptage des coïncidences a été réalisé en plaçant l'oscilloscope en mode  $xy$ . Dans le cas des signaux de la figure 6, représenter la figure que l'on obtiendrait en se plaçant dans ce mode.

**B.II.2.g** La température peut-elle influencer sur la mesure réalisée ? Justifier.

Comme nous venons de l'entrevoir, la mesure du déphasage entre l'onde incidente et l'onde réfléchie peut nous renseigner sur la durée de l'aller-retour. Un paramètre permet d'obtenir cette information.

### B.II.3 Quelques étages d'un phasemètre électronique de principe

#### L'étage principal

L'étage principal d'un phasemètre de principe est constitué d'un multiplieur suivi d'un filtre RC (voir figure 7).

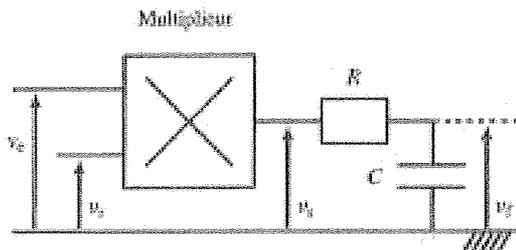


FIGURE 7 - Un étage du phasemètre

Le signal de tension  $v_1(t) = v_1 \cos(\omega_0 t)$  est proportionnel à l'amplitude de l'onde sonore émise. Celui de tension  $v_2(t) = v_2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est proportionnel à l'amplitude de l'onde sonore reçue après réflexion. Leurs pulsations sont identiques. On souhaite mesurer le déphasage entre ces deux signaux, ce que l'on va faire au moyen du montage dont le schéma est représenté sur la figure 7.

On note  $\underline{v}$  la grandeur complexe associée à la grandeur sinusoïdale  $v(t)$ .

**B.II.3.a** Un multiplieur est-il un composant actif ?

**B.II.3.b** Soit  $v_3(t) = k v_2(t) v_1(t)$ , la tension en sortie du multiplieur de constante caractéristique  $k$ . Préciser l'unité de  $k$ , donner l'expression linéarisée de  $v_3(t)$  et représenter son spectre fréquentiel. Calculer la valeur moyenne de la tension  $v_3(t)$ .

**B.II.3.c** Établir l'expression complexe de la fonction de transfert du filtre RC.  $\underline{H}(j\omega) = \frac{v_F}{v_3}$ , où  $\omega$  représente la pulsation des signaux. Préciser la nature de ce filtre.

**B.II.3.d** Établir l'expression de son gain en décibel  $G_{dB}(\omega)$  et représenter la courbe de Bode asymptotique correspondante.

**B.II.3.e** Établir une inégalité liant  $R$ ,  $C$  et  $\omega_0$  permettant de ne sélectionner qu'une seule composante spectrale du signal  $v_3(t)$ . Donner, dans ces conditions, l'expression du signal  $v_F(t)$ . Quelle fonction réalise alors l'étage RC ?

#### Extraction du signal

Du fait de son trajet entre le télémètre et la cible, l'onde récupérée sous forme électrique est perturbée (voir figure 6). On modélise ces perturbations par un signal sinusoïdal de fréquence différente de celle recherchée, noté  $v_2(t) = v_2 \cos(\Omega t)$ . Sur les entrées du multiplieur nous avons donc en réalité les signaux  $v_1(t) = v_1 \cos(\omega_0 t)$  et  $v_2(t) = v_1 \cos(\omega_0 t + \varphi) + v_2 \cos(\Omega t)$ .

**B.II.3.f** Établir l'expression linéarisée de  $v_3(t)$ .

**B.II.3.g** On suppose que  $\Omega \gg \omega_0 \gg 1/(RC)$ . En déduire  $v_F(t)$  et conclure quant à l'intérêt de ce montage. Quel nom donne-t-on à cette technique ? Citer une expérience où cette technique peut être utilisée.

### Amplification du signal

Le signal récupéré par le télémètre étant fortement atténué, une amplification est nécessaire. Les constructeurs proposent des amplificateurs d'instrumentation intégrés de structure simple, proche de celle de la figure 8. Les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

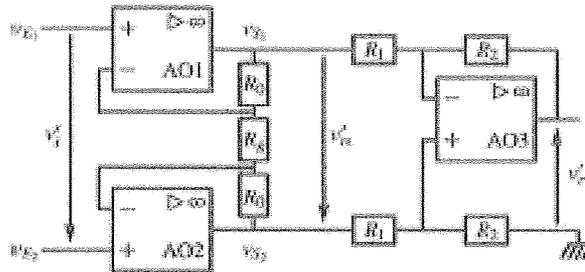


FIGURE 8 - Étage amplificateur

**B.II.3.b** Qu'est-ce qu'un amplificateur opérationnel idéal ? Tracer sa caractéristique. Justifier le fonctionnement en régime linéaire des amplificateurs opérationnels du circuit de la figure 8.

**B.II.3.i** On suppose qu'un même courant traverse les résistances  $R_0$  et  $R_2$ . En déduire alors l'expression de  $\underline{H}_{12}(j\omega) = v'_3/v'_1$ .

**B.II.3.j** Déterminer l'expression de  $\underline{H}_3(j\omega) = v'_3/v'_2$ . En déduire que  $v'_3 = \frac{R_2}{R_1} \left( 1 + \frac{2R_0}{R_2} \right) v'_1$ .

**B.II.3.k** Pour le signal 2 de la figure 6, supposé visualisé avant amplification, estimer la valeur maximale du coefficient d'amplification à ne pas dépasser.

### B.II.4 Le télémètre réel

Dans le télémètre utilisé sur certaines paires de jumelles, c'est un signal lumineux qui est utilisé pour la mesure de distance, plutôt qu'une onde sonore.

**B.II.4.a** Pour quelle raison privilégie-t-on l'onde lumineuse par rapport à l'onde sonore ?

**B.II.4.b** Si la cible se déplace le long de l'axe de visée du télémètre, le signal réfléchi diffère du signal incident. Comment est modifié le signal réfléchi si la cible approche du télémètre ? Comment se nomme cet effet ? Quelle information peut-on obtenir de son exploitation ?

# Décomposition d'un signal en série de Fourier

**Objectifs:** Les études menées en classe de 1ère année sur les signaux analogiques (majoritairement électriques) ont toujours été présentées en fonction du temps, et souvent obtenues par résolution d'une équation différentielle régissant le système. L'objectif de ce cours est de présenter une analyse des signaux analogiques en terme de fréquence, et de dégager la notion de spectre de fréquence d'un signal. Cette approche permettra la compréhension du principe de fonctionnement des filtres analogiques, dont l'usage est extrêmement répandu en électronique.

**NB:** Ce cours ne prétend pas à une présentation exhaustive du développement en série de Fourier, mais une approche pragmatique, permettant l'utilisation de ce concept en physique. On se reportera au cours de mathématiques pour un large approfondissement de ces notions.

## 1 Eléments de théorie

### 1.1 Principe

On montre dans le cadre du cours de mathématiques que toute fonction périodique  $f(t)$  de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  peut, sous certaines conditions de continuité et de dérivabilité, s'écrire comme la superposition de fonctions sinusoïdales:

*1ère forme:*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (1)$$

$$= a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

*2nde forme:* on peut également écrire la décomposition de Fourier de  $f(t)$  sous la forme suivante:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [c_n \cos(n\omega t + \phi_n)] \quad (2)$$

$$= a_0 + c_1 \cos(\omega t + \phi_1) + c_2 \cos(2\omega t + \phi_2) + \dots$$

**Vocabulaire:**

- Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ , ou  $c_n$  et  $\phi_n$  sont appelés **coefficients de Fourier** de la fonction  $f$ .
- Les coefficients  $c_n$ , correspondant à la seconde formulation de la décomposition en série de Fourier, sont appelés **amplitude des harmoniques d'ordre n**.
- Les termes de pulsation  $\omega$  sont appelés **composantes fondamentales du signal**.
- Les termes de pulsation  $n\omega$  avec  $n \geq 2$  sont appelés **composantes harmoniques du signal**.

*Exercice de cours 1.1.1* Montrer que  $c_n$ , amplitude de l'harmonique d'ordre  $n$ , et le déphasage  $\phi_n$  de cette harmonique sont donnés par:  $c_n = \sqrt{(A_n^2 + B_n^2)}$  et  $\phi_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}$ .

**1.2 Recherche des coefficients de Fourier**

L'analyse de Fourier d'un signal consiste en fait à déterminer les coefficients  $a_0$ ,  $a_n$ , et  $b_n$ . On se propose ici, connaissant la fonction  $f(t)$ , d'établir les relations permettant leur calcul.

Soit la fonction  $f(t)$  décomposable en série de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

Intégrons les deux membres de cette équation sur une période de la fonction  $T$  (les conditions de continuité assurées le permettant!):

$$\int_0^T f(t) \cdot dt = \int_0^T a_0 \cdot dt + \underbrace{\int_0^T \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \right] \cdot dt}_{=0 \text{ (intégration sur n périodes des fonctions sin et cos)}}$$

On a donc:

$$a_0 \cdot T = \int_0^T f(t) \cdot dt$$

soit finalement:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt} \tag{3}$$

**Remarque:**  $a_0$  représente simplement la **valeur moyenne du signal  $f(t)$**

La recherche des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  est un peu plus délicate:

multiplions l'équation (1) à gauche et droite par  $\cos(m\omega t)$  où  $m$  est une valeur particulière de  $n$  (comprise entre 1 et  $+\infty$ ), puis intégrons l'équation ainsi obtenue sur une période:

$$\int_0^T f(t) \cdot \cos(m\omega t) \cdot dt = \int_0^T a_0 \cdot \cos(m\omega t) + \int_0^T \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t)\cos(m\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)] \right] \cdot dt$$

soit en glissant l'intégrale dans la sommation:

$$\int_0^T f(t) \cdot \cos(m\omega t) \cdot dt = \underbrace{\int_0^T a_0 \cdot \cos(m\omega t)}_{=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \int_0^T a_n \cos(n\omega t)\cos(m\omega t) \cdot dt + \int_0^T b_n \sin(n\omega t)\cos(m\omega t) \cdot dt \right]$$

Les formules trigonométriques de changement de produits en sommes permettent ensuite de transformer les intégrales. On trouve sans peine:

$$\begin{aligned} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t) &= \frac{1}{2} \cos[(n+m)\omega t] + \frac{1}{2} \cos[(n-m)\omega t] \\ \sin(n\omega t)\cos(m\omega t) &= \frac{1}{2} \sin[(n+m)\omega t] + \frac{1}{2} \sin[(n-m)\omega t] \end{aligned}$$

L'équation précédente devient alors:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cdot \cos(m\omega t) \cdot dt = & \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T \frac{1}{2} a_n \cos[(n+m)\omega t] \cdot dt \\ & + \int_0^T \frac{1}{2} a_n \cos[(n-m)\omega t] \cdot dt \\ & + \int_0^T \frac{1}{2} b_n \sin[(n+m)\omega t] \cdot dt \\ & + \int_0^T \frac{1}{2} b_n \sin[(n-m)\omega t] \cdot dt \end{aligned}$$

Dans la sommation, deux situations sont à considérer:

- Si  $m \neq n$ : tous les intégrales sont nulles puisque l'on réalise des intégrations sur des intervalles multiples de la période.
- Si  $m = n$ : seul le second terme est non nul, les autres l'étant pour la même raison que précédemment (périodicité des fonctions sin et cos).

Après simplification il reste donc:

$$\int_0^T f(t) \cdot \cos(m\omega t) \cdot dt = \int_0^T \frac{1}{2} a_n \cdot dt = \frac{1}{2} a_n \cdot T$$

soit:

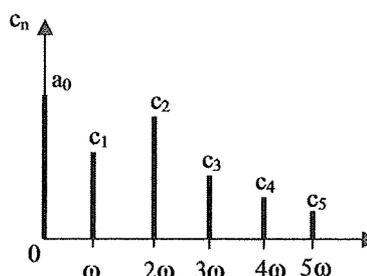
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) \cdot dt \quad (4)$$

On montre par une méthode similaire (en multipliant les intégrands par  $\sin(m\omega t)$ ), que:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) \cdot dt \quad (5)$$

### 1.3 Spectre de fréquence - représentation spectrale des harmoniques

On appelle **représentation spectrale du signal**, ou simplement **spectre du signal**, le graphique obtenu en portant en ordonnées l'amplitude des différents harmoniques et en abscisse les pulsations de celles-ci.



*Spectre d'un signal*

## 1.4 Propriétés utiles

### 1.4.1 Parité

- Si la fonction  $f(t)$  est paire:  $f(t) = f(-t)$  conduit à  $\mathbf{b_n = 0 \forall n} \implies$  Pour un signal pair, tous les coefficients  $b_n$  sont nuls.
- Si la fonction  $f(t)$  est impaire:  $f(t) = -f(-t)$  conduit à  $\mathbf{a_n = 0 \forall n} \implies$  Pour un signal impair, tous les coefficients  $a_n$  sont nuls.

### 1.4.2 Valeur moyenne

On remarque que le coefficient  $a_0$  défini par la relation (3) est simplement la valeur moyenne du signal  $f(t)$ :

$$\boxed{\bar{f} = \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt = a_0} \quad (6)$$

### 1.4.3 Valeur efficace

Soit un signal  $f(t)$  dont la décomposition spectrale s'écrit:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [c_n \cos(n\omega t + \phi_n)]$$

Le carré de la valeur efficace de ce signal est *par définition* la valeur moyenne de  $f^2(t)$ :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \cdot dt$$

Calculons  $f^2(t)$ :

$$\begin{aligned} f_{eff}^2(t) = \int_0^T & \left[ a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \cos^2(n\omega t + \phi_n) \right. \\ & + 2a_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n) \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} c_n c_k \cos(n\omega t + \phi_n) \cos(k\omega t + \phi_k) \right] \cdot dt \end{aligned}$$

L'intégration de ces termes est immédiate car seuls les deux premiers sont non nuls; ils valent respectivement  $a_0^2$  et  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ . On obtient donc:

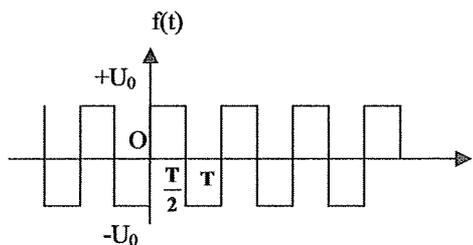
$$\boxed{f_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2)} \quad (7)$$

## 2 Décomposition en série de Fourier de quelques signaux courants

### 2.1 Signal carré (impair)

*Exercice de cours 2.1.1* Un générateur basse fréquence délivre le signal créneaux représenté ci-contre:

1. Quelle est la valeur moyenne de ce signal?
2. Déterminer le spectre de ce signal.<sup>1</sup>

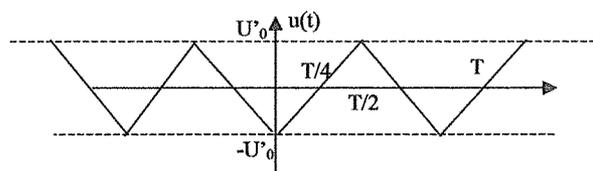


Signal en créneaux impair

### 2.2 Signal triangulaire (pair)

*Exercice de cours 2.2.1* Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec cette fois le signal triangulaire impair représenté ci-contre:

1. Quelle est la valeur moyenne de ce signal?
2. Déterminer le spectre de ce signal.<sup>2</sup>



Signal triangulaire pair

## 3 Exemples d'applications

### 3.1 Cas d'étude n°1: Effet d'un filtre passe-bas sur un signal carré - filtrage pour un onduleur

*Exercice de cours 3.1.1* On souhaite créer un signal quasi-sinusoïdal  $s(t)$  à partir d'un signal créneaux  $e(t)$  de pulsation  $\omega_m$  identique à celui étudié en exercice 2.1.1. Pour cela on dispose d'un filtre passe-bas du premier ordre de type RC.

1. Rappeler le schéma d'un tel filtre, et tracer l'allure de la réponse en gain.
2. Comment choisir  $R$  et  $C$  pour assurer que le signal de sortie soit assez proche d'un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega_m$ ?
3. Quelle amélioration proposeriez-vous pour que le signal de sortie soit encore plus proche d'un signal sinusoïdal pur?

### 3.2 Cas d'étude n°2: Principe d'un analyseur de spectre

*Exercice de cours 3.2.1* Proposer le principe d'un montage analogique permettant de déterminer l'amplitude des harmoniques d'un signal  $f(t)$ . Pour cela, on dispose du matériel suivant: multiplieur analogique de signaux, générateur basse fréquence avec wobulateur (signal auxiliaire proportionnel à la fréquence du signal délivré), filtre passe-bas (second ordre), oscilloscope cathodique XY.

1.  $a_0 = 0$ ,  $a_n = 0$ ,  $b_n = \frac{2U_0}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)]$

2.  $a_0 = 0$ ,  $b_n = 0$  et par intégration du signal créneaux impair, on obtient  $a_n = \frac{-8U'_0}{\pi^2(2n+1)^2}$

## A Notion d'harmoniques.

En électricité: Un analyseur de Fourier très simplifié.

### A.1 Quelques généralités:

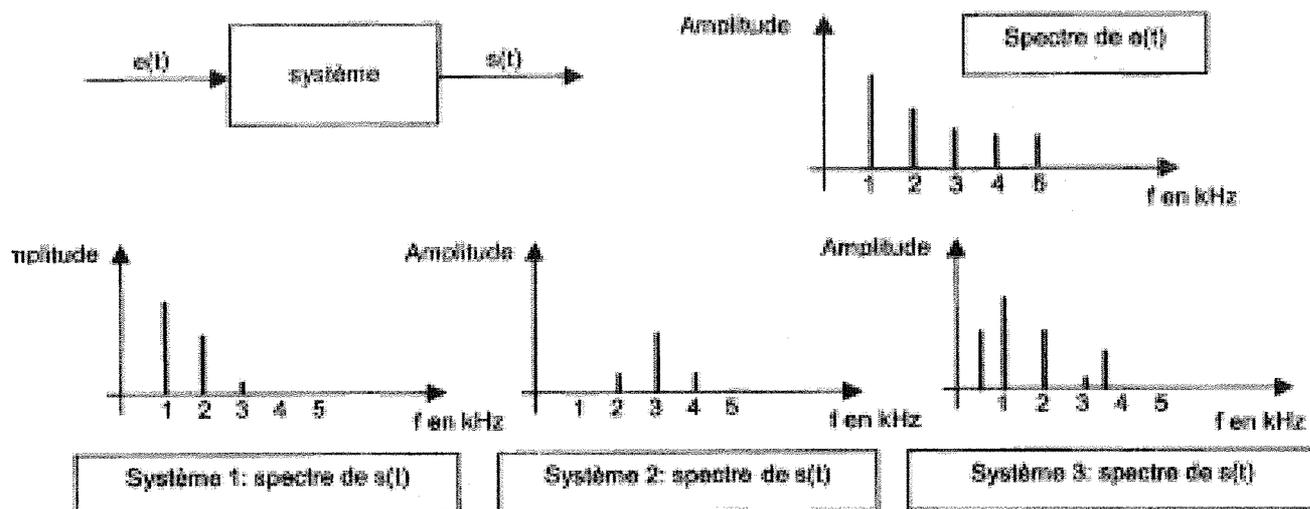
A.1.1 Soit un système physique qui à une grandeur d'entrée fonction du temps  $e(t)$  fait correspondre une grandeur de sortie fonction du temps  $s(t)$ . A quelle condition ce système peut-il être dit linéaire ?

A.1.2. On étudie expérimentalement la transfert de plusieurs systèmes ( système 1, système 2, système 3) à l'aide d'un analyseur de spectre numérique ; pour cela on applique à leur entrée le même signal  $e(t)$ . On donne ci-dessous les spectres de Fourier du signal  $e(t)$  et ceux des signaux obtenus en sortie des trois systèmes.

A.1.2.a. Qu'appelle-t-on spectre de Fourier d'un signal périodique  $s(t)$  ?

A.1.2.b. Le système 1 est-il linéaire ? Quel est son rôle ?

A.1.2.c. Qu'en est-il des systèmes 2 et 3 ?



### A.1.3 Impédance complexe.

On utilise des dipôles linéaires en régime sinusoïdal.

On note  $u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$  la tension aux bornes du dipôle et  $i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$  l'intensité du courant qui traverse le dipôle,  $u(t)$  et  $i(t)$  seront définis en convention récepteur.

À chaque grandeur temporelle  $x(t) = X\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi_x)$  on associe le complexe suivant

$\underline{x}(t) = X\sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$ , on peut aussi utiliser l'amplitude complexe  $\underline{X} = X\sqrt{2} e^{j\varphi_x}$

A.1.3.1. Que représentent les grandeurs  $U$ ,  $\omega$  et  $\varphi_u$  ? Peut-on les mesurer et comment ?

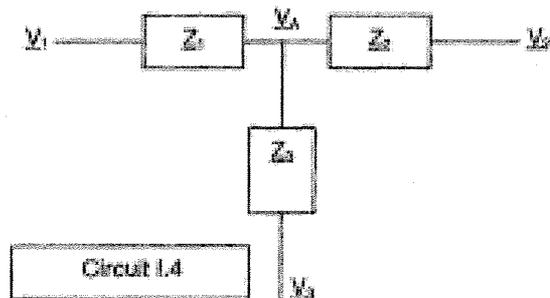
A.1.3.2.a. Etablir l'expression de l'impédance  $\underline{Z}$  complexe associée à chacun des dipôles idéaux suivant:

- résistance "pure"
- capacité "pure"
- inductance "pure"

A.I.3.2.b. On mesure pour un dipôle linéaire particulier:  $Z = A + j.B$  ;  $A = 1 \text{ k}\Omega$  et  $B = 1 \text{ k}\Omega$ .

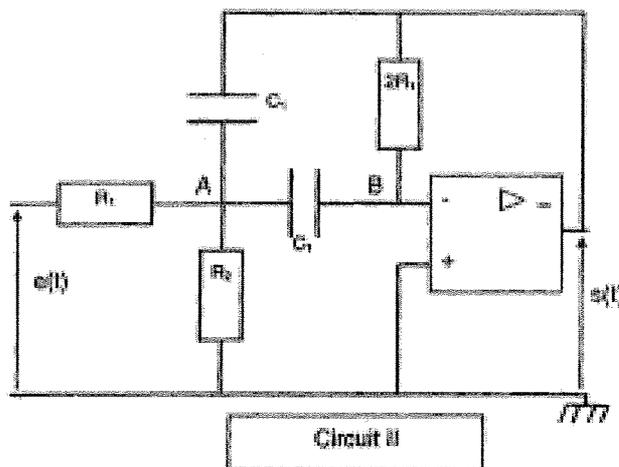
Calculer  $i(t)$  si  $u(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t)$  avec  $u(t)$  en volts.

A.I.4 Théorème de Millmann.



Calculer l'amplitude complexe  $V_A$  du potentiel au nœud A dans le circuit I.4 en fonction des admittances  $Y_i = \frac{1}{Z_i}$  et des amplitudes complexes  $V_i$  des potentiels des extrémités des branches.

A.II Filtre sélectif.



On étudie le montage ci-contre:(circuit II)

L'amplificateur opérationnel est idéal ( $i^+ = 0$  et  $i^- = 0$ ) et fonctionne en régime linéaire ( $V^+ - V^- = 0$ )

A.II.1. Fonction de transfert.

On impose à l'entrée une tension  $e(t)$  sinusoïdale de pulsation  $\omega$ .

A.II.1.a. On définit le transfert en tension  $I(\omega) = \frac{s(t)}{e(t)}$ . Montrer que le transfert en tension ne dépend pas du temps, et justifier que l'étude de l'évolution de  $I(\omega)$  en fonction de  $\omega$  permet de connaître le comportement en fréquence du circuit.

A.II.1.b. Pourquoi étudie-t-on le transfert pour une tension sinusoïdale ?

A.II.1.c. Établir le système d'équations vérifiées par  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $S$  en fonction de  $E$  et des éléments du montage.

A.II.1.d. Montrer que l'on peut mettre  $I(\omega)$  sous la forme  $I(\omega) = \frac{-1}{1 + \left( R_1 C_1 \omega - \frac{1}{R_2 C_1 \omega} \right)}$  avec

$$R_2 = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

A.II.1.e. Mettre  $\underline{T}(s)$  sous la forme canonique  $T(\omega) = \frac{-1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$  et identifier  $Q$  et  $\omega_0$  en

fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C_1$ . Calculer la valeur numérique de  $Q$ ,  $\omega_0$  et  $f_0 = \omega_0/2\pi$ .

A.II.1.f. Calculer les valeurs à donner à  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C_1$  pour avoir  $\omega_0 = 36 \text{ kHz}$ , le facteur de qualité  $Q$  étant inchangé.

### A.II.2. Etude du gain.

On étudie  $T(\omega) = |\underline{T}(j\omega)|$ .

A.II.2.a. Montrer que  $T(\omega)$  passe par un maximum pour une valeur de  $\omega$  que l'on exprimera.

A.II.2.b. Définir, puis calculer les pulsations de coupure à -3 dB en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

En déduire la bande passante  $B_p$ .

A.II.2.c. Déduire de ce qui précède une interprétation possible du facteur de qualité  $Q$ .

A.II.2.d. Calculer numériquement la bande passante en fréquence  $B_f$  ( $B_f = B_p / 2\pi$ ).

A.II.2.e. Tracer l'allure de  $T(\omega)$ .

### A.II.3 Etude pratique

A.II.3.a. Représenter un montage expérimental qui permettrait de visualiser  $e(t)$  et  $s(t)$ . On fera apparaître tous les appareils et connexions nécessaires.

A.II.3.b. Décrire un protocole expérimental qui permettrait d'étudier le comportement en fréquence du circuit.

A.II.3.c. L'A.O est alimentée avec une source (+15V, -15V).

A quoi sert cette alimentation ?

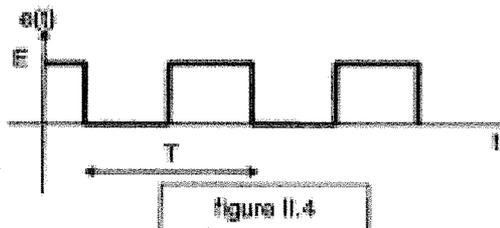
Que se passerait-il si l'amplitude théorique de  $s(t)$  dépassait 15 V ?

A.II.3.d. Que se passerait-il si on inversait les bornes + et - de l'A.O. dans le circuit II ?

### A.II.4. Analyseur de Fourier élémentaire.

On met à l'entrée de ce circuit II le signal  $e(t)$  représenté ci-contre (figure II.4).

avec  $f = 1/T = 3,0 \text{ kHz}$  et  $E = 10 \text{ V}$ .



On montre que l'on peut décomposer le signal  $e(t)$  en une combinaison linéaire de sinusoïdes sous

la forme :  $e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sin(2\pi f_1 t) + \frac{2E}{3\pi} \sin(2\pi \cdot 3f_1 t) + \frac{2E}{5\pi} \sin(2\pi \cdot 5f_1 t) + \dots$

A.II.4.a. Comment s'appellent les diverses fréquences qui apparaissent dans l'expression de  $e(t)$  ?

A.II.4.b. Tracer l'allure du signal de sortie  $s(t)$  si le circuit II est réglé pour  $f_0 = 3,0 \text{ kHz}$  et  $Q = 20$ .

A.II.4.c. Comment pourrait-on utiliser le circuit II pour déterminer le spectre en fréquence de  $e(t)$  ?

**Etude d'un modulateur et démodulateur AM**

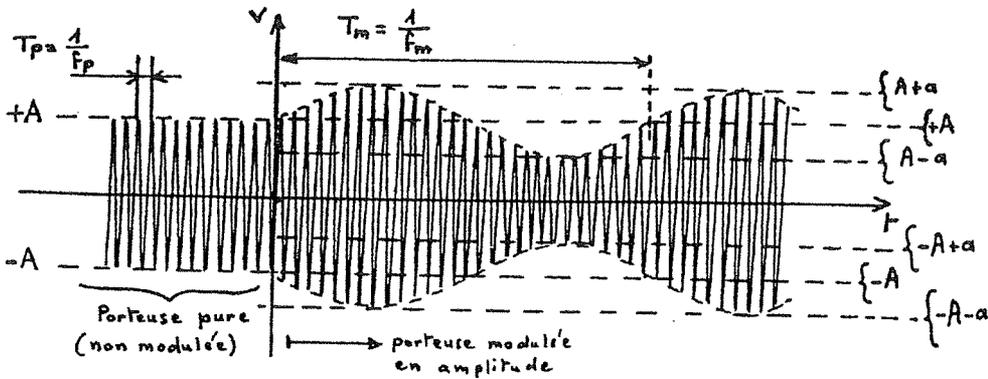
On se propose d'étudier successivement un circuit modulateur et un circuit de démodulation synchrone pour une liaison en modulation d'amplitude.

Dans tout ce problème, on appellera :

- «  $f_p$  » fréquence de la porteuse et «  $A$  » son amplitude
- «  $f_m$  » fréquence du signal modulant basse-fréquence sinusoïdal et «  $a$  » son amplitude

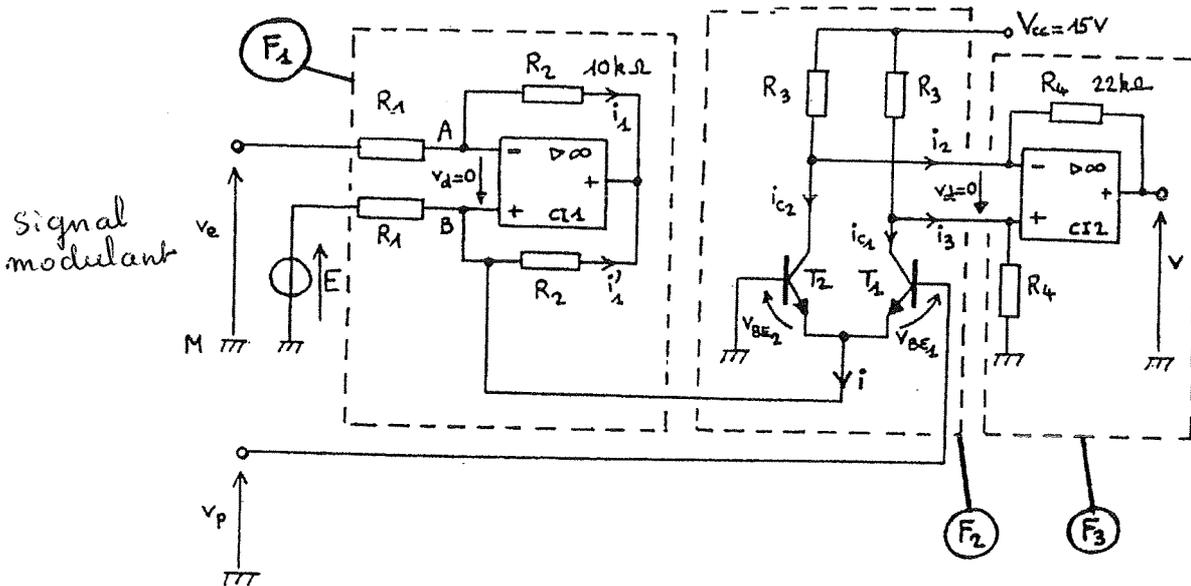
Le signal modulé en amplitude est représenté ci-dessous et a pour expression :

$$v(t) = A(1 + m\sin(\omega_m t)) \sin(\omega_p t) \quad \text{avec } m=a/A \text{ indice de modulation}$$



Les amplificateurs opérationnels sont supposés parfaits et sont alimentés en +15V et -15V.

Le **modulateur** a la structure suivante :



1) Montrer que le circuit  $F_1$  réalise la fonction « source de courant » et exprimer le courant de sortie «  $i$  » en fonction de  $v_e$ ,  $E$  et  $R_1$ .

On étudie maintenant le circuit différentiel F<sub>2</sub>. Les 2 transistors T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub> sont identiques et leur fonctionnement est décrit par le modèle exponentiel :

$$i_c = I_0 \cdot e^{\frac{V_{be}}{V_0}} \quad \text{avec} \quad V_{be} : \text{tension base-émetteur}, \quad i_c : \text{courant collecteur} \quad \text{et} \quad V_0 : 25 \text{ mV}$$

On négligera le courant de base devant le courant de collecteur.

2) Montrer alors que :  $i_{c1} = \frac{i}{1 + e^{-V_p/V_0}}$  et  $i_{c2} = \frac{i}{1 + e^{V_p/V_0}}$

3)

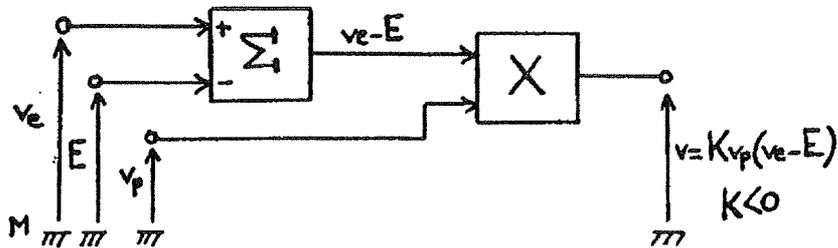
Sachant que  $V_p \ll V_0$ , donner l'expression approchée de  $i_{c1}$  et  $i_{c2}$  en fonction de  $i$ ,  $V_0$  et  $V_p$ .

En déduire que :  $i_{c1} - i_{c2} = \frac{v_e - E}{2 \cdot R_1} \cdot \frac{V_p}{V_0}$

4) En exprimant de deux manières la tension  $V_{cc}$  en fonction des courants et des résistances  $R_3$  et  $R_4$ , établir une relation très simple entre  $i_{c1} - i_{c2}$  et  $i_2 - i_3$ .

5) Calculer la tension de sortie  $v$  et montrer qu'elle s'écrit :  $v = K \cdot v_p (v_e - E)$  en précisant l'expression littérale du coefficient  $K$ . Calculer la valeur de la résistance  $R_1$  pour avoir  $K = -93,6$ . quelle est la fonction réalisée par cet ensemble ?

Le système étudié jusqu'ici est schématisé sur la figure ci-dessous :



L'information basse-fréquence s'écrit :  $v_e(t) = V_e \sin(\omega_m t)$  avec  $f_m = 5 \text{ kHz}$  et  $V_e = 50 \text{ mV}$

La porteuse s'écrit :  $v_p(t) = V_p \sin(\omega_p t)$  avec  $f_p = 800 \text{ kHz}$  et  $V_p = 5 \text{ mV}$

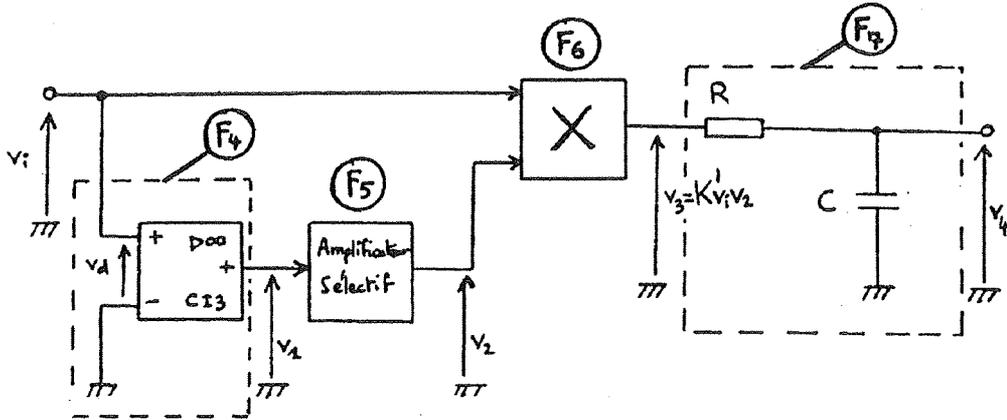
6) Sachant que  $E = -0,1 \text{ V}$ , montrer que le signal de sortie  $v(t)$  est un signal modulé en amplitude dont on précisera les caractéristiques (amplitude  $A$ , indice de modulation  $m$ )

Dans une liaison radio, ce signal est amplifié puis envoyé sur l'antenne qui rayonne une onde électromagnétique se propageant jusqu'à l'antenne de récepteur.

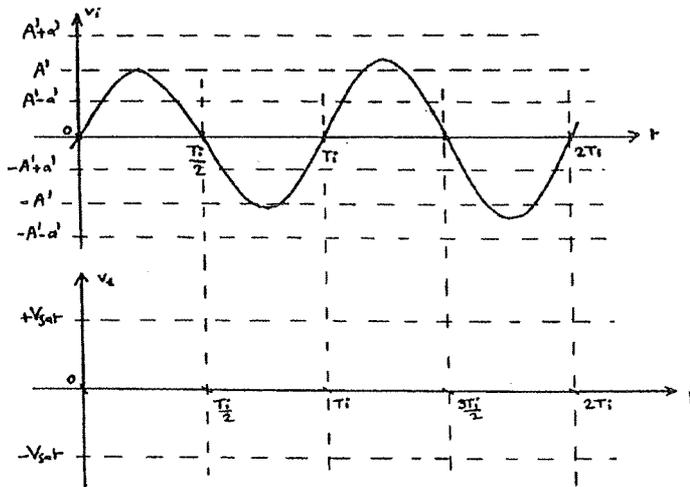
Le signal capté par l'antenne est amplifié, puis on opère un changement de fréquence et un filtrage sélectif. On obtient alors en sortie de ce filtre un signal modulé en amplitude à la fréquence intermédiaire  $f_i = 455 \text{ kHz}$ .

Ce signal à démoduler a pour expression :  $v_i(t) = A(1 + m \sin(\omega_m t)) \sin(\omega_i t)$

La démodulation de ce signal se fait par un démodulateur synchrone dont la structure est la suivante :



7) Compléter le chronogramme ci-dessous en dessinant l'allure de la tension  $v_1(t)$  en sortie du comparateur  $F_4$ .

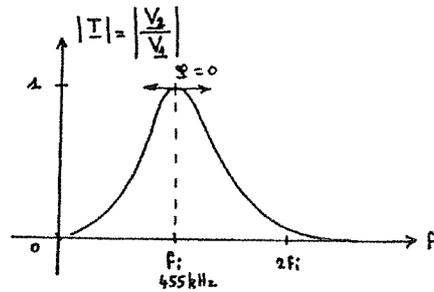


8) La courbe de réponse du filtre  $F_5$  est représentée ci-contre.

La décomposition en série de Fourier de  $v_1(t)$  s'écrit :

$$v_1(t) = (4V_{sat}/\pi) \cdot (\sin(\omega t) + 0,33 \sin(3\omega t) + 0,2 \sin(5\omega t) + \dots)$$

Donner l'expression mathématique de  $v_2(t)$ .



9) Exprimer la tension  $v_3(t)$  en sortie du multiplieur  $F_6$  de constante  $K'$ .

On posera :  $k = 4K'V_{sat}/\pi$  et on utilisera :  $\sin^2(x) = 0,5 - 0,5\cos(2x)$  et  $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

10) Donner les caractéristiques du filtre  $F_7$  sachant que  $R = 8,2 \text{ k}\Omega$  et  $C = 3,3 \text{ nF}$ . Sachant que la fréquence  $f_m$  n'excède pas  $5 \text{ kHz}$ , donner l'expression de la tension  $v_4(t)$  et conclure.

## PARTIE A. MODULATION ET DÉMODULATION

Pour la transmission de messages, on utilise souvent le principe de la modulation d'une tension de fréquence élevée par la tension  $v_m(t)$  représentant le message à transmettre. La tension de fréquence élevée s'appelle la porteuse, et sera notée  $v_p(t)$ . Lorsque l'on dit que la porteuse a une fréquence élevée, cela signifie plus précisément que la tension représentant le message ne comporte que des fréquences faibles devant celle de la porteuse. La tension modulée sera notée  $s(t)$ .

## A.I. GÉNÉRALITÉS

A.I.1. Donner deux raisons parmi celles qui justifient le recours à la modulation.

A.I.2.a) À l'aide de graphes représentant  $v_m(t)$  d'une part,  $s(t)$  d'autre part, définir ce qu'on appelle modulation d'amplitude et modulation de fréquence.

A.I.2.b) Donner les expressions mathématiques de  $s(t)$  dans chacun des deux cas, en prenant pour la porteuse une tension de la forme  $v_p(t) = A \cos(2\pi f_p t)$ .

A.I.3. On se place dans le cas particulier où la tension  $v_m(t)$  est également sinusoïdale, et l'on pose  $v_m(t) = B \cos(2\pi f_m t)$ . Pour les applications numériques, on prendra  $f_m = 8$  kHz, et  $f_p = 200$  kHz.

A.I.3.a) Donner les fréquences qui interviennent dans le spectre de  $s(t)$  dans le cas de la modulation d'amplitude.

A.I.3.b) Dans le cas de l'émission radiophonique en modulation d'amplitude, quel écart minimal doit exister entre les fréquences porteuses de deux stations, sachant que la bande passante est limitée à  $\varnothing$  kHz pour le son que l'on transmet.

A.I.3.c) En Europe de l'Ouest, les stations radiophoniques émettant en Grandes Ondes sont réparties selon le plan de fréquences suivant :

Deutschlandfunk :	153 kHz	France Inter :	162 kHz	Europe n°1 :	182 kHz
BBC :	198 kHz	RMC :	216 kHz	RTL :	234 kHz

Ce plan de fréquences vous semble-t-il respecter le critère établi au A.I.3.b) ?

A.I.3.d) Si l'on voulait une meilleure qualité sonore lors de la réception d'émissions en Grandes Ondes, il faudrait faire passer la bande passante pour le son transmis de  $\varnothing$  kHz à 18 kHz. Combien de stations pourraient alors exister sur la bande des Grandes Ondes, sachant qu'elle s'étend de 153 kHz à 279 kHz ?

A.I.4. Lors de l'émission, puis de la réception d'un signal modulé en amplitude, on effectue un filtrage pour isoler la tension modulée  $s(t)$  des autres tensions (parasites, autres émetteurs ...) qui pourraient s'introduire dans le montage.

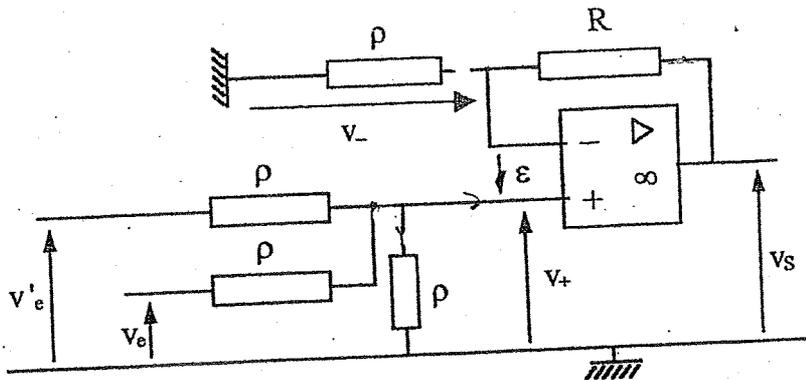
A.I.4.a) Quel type de filtre utilise-t-on ?

A.I.4.b) En prenant l'exemple d'un récepteur accordé sur l'émetteur de France Inter en Grandes Ondes, déterminer la bande passante que doit avoir le filtre d'accord du récepteur. On utilisera les données fournies dans la question A.I.3.

A.I.4.c) Quelle allure la fonction gain-fréquence du filtre d'accord doit-elle avoir à l'intérieur de la bande passante pour que la réception du son soit la plus fidèle possible ? Sinon, que se produira-t-il ?

A.II. MISE EN ŒUVRE DE LA MODULATION D'AMPLITUDE

A.II.1. On considère le montage suivant, l'amplificateur opérationnel étant supposé parfait :



Toutes les résistances, sauf R, ont une valeur commune, notée  $\rho$ .

On note  $v_-$  et  $v_+$  les potentiels respectifs de l'entrée inverseuse et non inverseuse de l'amplificateur opérationnel, ces potentiels étant mesurés par rapport à la masse du montage.

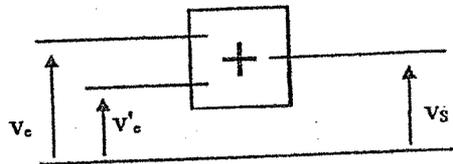
A.II.1.a) Etablir l'expression de  $v_+$  en fonction de  $v_e$  et  $v'_e$ , et celle de  $v_-$  en fonction de  $v_s$ .

A.II.2.b) Justifier brièvement le mode de fonctionnement (linéaire ou saturé) de l'amplificateur opérationnel. Que vaut alors  $\epsilon$  ?

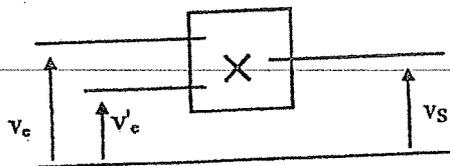
A.II.1.c) En déduire la valeur qu'il faut donner à R pour avoir  $v_s = v_e + v'_e$ .

A.II.1.d) Quel ordre de grandeur préconiserez-vous dans la pratique pour la valeur numérique de  $\rho$  ?

A.II.2. Dans les questions suivantes, on supposera que la condition  $v_s = v_e + v'_e$  est satisfaite, et on représentera le montage additionneur ainsi réalisé par le symbole suivant :



De la même façon, on représentera le montage multiplieur par :



Pour le montage multiplieur, on a  $v_s = k v_e v'_e$ , avec  $k = 0,1 \text{ V}^{-1}$ .

Le générateur délivrant le signal de fréquence  $f_p$  est réglé avec une amplitude de 10 V. Associer les montages précédents avec des générateurs dont vous préciserez les caractéristiques et les réglages, afin de créer le signal suivant :

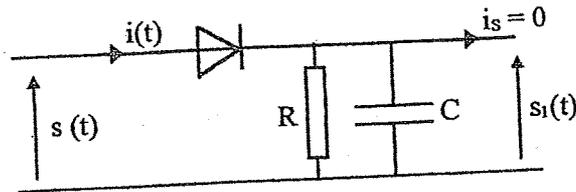
$$s(t) = A [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t),$$

On prendra les valeurs numériques suivantes :  $f_m = 1 \text{ kHz}$ ,  $f_p = 200 \text{ kHz}$ ,  $A = 10 \text{ V}$ ,  $m = 0,2$ .

Tournez la page S.V.P.

### A.III. DÉMODULATION D'AMPLITUDE

A.III.1. Après réception, la tension  $s(t)$  précédente doit être démodulée. Une façon simple de procéder est d'utiliser une diode, que l'on supposera idéale, associée à une résistance  $R$ , et à une capacité  $C$  selon le montage représenté ci-après, nommé détecteur de crête. On supposera négligeable le courant  $i_s$  débité en sortie.



Pour étudier le fonctionnement de ce montage, on remplace dans un premier temps  $s(t)$  par une tension purement sinusoïdale  $v(t) = V_0 \cos \omega t$ . On note  $T$  la période correspondante.

A.III.1.a) Lorsque la diode est passante, redessiner le schéma du montage.

A.III.1.b) La diode étant toujours supposée passante, on cherche l'expression de  $i(t)$  sous la forme  $I_0 \cos(\omega t + \phi)$ . En utilisant les notations complexes, expliciter les expressions de  $I_0$  et de  $\phi$  en fonction de  $V_0$ ,  $R$ ,  $C$  et  $\omega$ . Justifier l'intervalle dans lequel le déphasage  $\phi$  se situe.

A.III.1.c) La diode étant toujours supposée passante, à quel instant  $t_0$  compris entre 0 et  $T$  le courant  $i(t)$  s'annule-t-il en décroissant? Exprimer  $t_0$  en fonction de  $T$ ,  $\phi$  et  $\omega$ . Aux instants suivant immédiatement  $t_0$ , que peut-on prévoir quant à l'état de la diode?

A.III.2.a) Lorsque la diode est bloquée, redessiner le schéma du montage.

A.III.2.b) La diode étant toujours supposée bloquée, et en notant  $U_0$  la tension initiale sur une nouvelle échelle de temps  $t'$ , établir l'expression de la tension  $s_1(t')$ . À quelle condition portant sur  $v(t)$  et  $s_1(t)$  la diode reste-t-elle effectivement bloquée?

A.III.3. Sans justification, dessiner sur les mêmes axes l'allure des tensions  $v(t)$  et  $s_1(t)$  en fonction du temps. Sur une période  $T$ , préciser sur le graphique les intervalles de temps où la diode est bloquée, et ceux où elle est passante.

A.III.4.a) Dans cette question, on considère à nouveau que c'est la tension modulée  $s(t)$  définie à la question A.II.2. qui est appliquée à l'entrée du détecteur de crête. Comment choisir la valeur du produit  $RC$  pour effectuer une démodulation correcte? Proposer une valeur numérique pour  $RC$ .

A.III.4.b) Indiquer qualitativement ce qu'on observe pour  $s_1(t)$  si le produit  $RC$  est trop faible, ou trop grand?

A.III.3. Le circuit représenté ci-dessus présente l'avantage de la simplicité. Cependant, les récepteurs radiophoniques qui nous entourent utilisent un autre principe de démodulation. Lequel et pourquoi?

### A.IV. PROPAGATION. QUESTION DE CULTURE GÉNÉRALE

À puissance émise égale, expliquer rapidement pourquoi tous les émetteurs n'ont pas la même portée, selon la gamme de fréquence dans laquelle ils émettent, et pourquoi cette portée se modifie entre le jour et la nuit. Qu'est-ce qui justifie le choix des ondes centimétriques pour les communications par satellites?

Vos réponses devront être comprises par des élèves de niveau lycée, et ne comporter aucun calcul.