LE GAZ PARFAIT

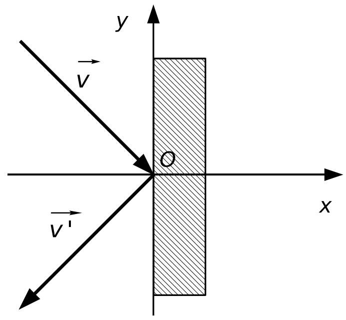
A. MODELE DU GAZ PARFAIT (d'après Agrégation externe option chimie 1998)

I. Pression cinétique

Dans le cadre de la théorie cinétique des gaz, le modèle du gaz parfait est le suivant : un ensemble de particules ponctuelles, sans interaction entre elles et dont les vitesses obéissent à une loi statistique de distribution homogène et isotrope. On note $< v_x >$ la valeur moyenne de la composante v_x de la vitesse et $u = < v^2 >^{1/2}$ la vitesse quadratique moyenne.

1 - Une particule de masse m heurte une paroi immobile.

Soient $\vec{v}$ sa vitesse avant le choc et $\vec{v'}$ sa vitesse après le choc. L'axe *Ox* est perpendiculaire à la paroi, orienté vers l'extérieur du fluide. Le choc est élastique et sans frottement.



Quelles relations lient les composantes de $\vec{v}$ et de $\vec{v'}$? Déterminez la variation de la quantité de mouvement de la particule lors du choc.

2 - On considère un modèle semi-macroscopique de répartition des particules ; soit n_1 le nombre par unité de volume de particules dont la vitesse admet sur l'axe des x la composante v_x .

Donnez le nombre de particules de ce type qui heurtent un élément de surface dS de la paroi pendant l'intervalle de temps dt ; exprimez la quantité de mouvement cédée par ces particules à la paroi, en fonction de n_1, v_x, dS, dt et de la masse m d'une particule.

Soit n le nombre total de particules par unité de volume du récipient ; on admet la relation :

$$< n_1\, v_x^2 > = \frac{1}{6}\, n\, u^2$$

Expliquez qualitativement l'origine du facteur 6.

3 - Définissez la pression P du fluide dans le cadre du modèle précédent ; exprimez cette pression en fonction de n, m et u.

4 - En utilisant l'équation d'état du gaz parfait pour une mole de masse M, calculez la vitesse quadratique moyenne u des particules en fonction de la température.

Application numérique : quelle est la vitesse quadratique de l'hélium considéré comme un gaz parfait, à la température $T = 273$ K ?

Vous prendrez $R = 8,314$ J . K^{-1} . mol^{-1}.

II. Energie interne

1 - Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique, exprimez l'énergie interne d'une mole de gaz en fonction de la température T. Cette expression s'applique-t-elle à un gaz parfait diatomique ? Déterminez la capacité thermique molaire d'un gaz parfait monoatomique à volume constant.

2 - Dans le cas d'un système fermé, c'est à dire sans échange de matière avec le milieu extérieur, énoncez le premier principe de la thermodynamique dans le repère barycentrique du système. Quelle est sa signification physique ?

3 - La détente de Joule - Gay-Lussac est une détente adiabatique brutale dans le vide. Décrivez un dispositif expérimental permettant de réaliser cette détente. Quel est le comportement d'un gaz parfait lors de cette détente ?

III. Entropie

1 - Enoncez le second principe de la thermodynamique pour un système fermé. Quelle est sa signification physique ? Précisez la définition d'une transformation réversible et d'une transformation adiabatique.

2 - Définissez la capacité thermique molaire à volume constant C_V pour un fluide quelconque. Cette capacité thermique est-elle constante ? Peut-elle dépendre de la température T et du volume V du fluide ?

3 - On considère une mole de gaz parfait. Sa capacité thermique à volume constant dépend-elle de la température T et du volume V de la mole de gaz parfait ?

4 - Soit une mole de gaz parfait, qui lors d'une transformation infinitésimale réversible reçoit une quantité de chaleur δQ.

Donnez l'expression de δQ en choisissant le couple de variables (température T, volume V).

Le gaz parfait passe de l'état (T_1, V_1) à l'état (T_2, V_2) . Ecrivez, dans le cas le plus général, la variation d'entropie d'une mole de gaz parfait dans cette transformation. Que devient cette expression dans le cas particulier où la capacité thermique molaire C_V est constante ?

5 - Soit C_P la capacité thermique molaire à pression constante. On considère une mole de gaz parfait, dans un domaine d'étude tel que C_P et C_V soient constantes. On rappelle la relation de Mayer entre les capacités thermiques molaires : $C_P - C_V = R$.

Qu'appelle-t-on transformation isentropique ? Quelles précautions expérimentales doit-on prendre pour la réaliser ?

Retrouvez la loi de Laplace pour une transformation isentropique :

$$P \,.\, V^{\gamma} = \text{constante}$$

avec $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

TRANSFORMATIONS DU GAZ PARFAIT

A. ETUDE D'UN GAZ PARFAIT (d'après CAPES externe 1994)

On notera P, V, T les paramètres pression, volume et température d'un gaz ; on notera respectivement C_P et C_V les capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant, et γ le rapport : $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$. Dans ce qui suit, les systèmes thermodynamiques étudiés seront des gaz parfaits.

I. Quelques propriétés d'un gaz parfait.

1 - Rappelez l'équation d'état d'un gaz parfait ; on désignera par n le nombre de moles du gaz et par R la constante molaire des gaz parfaits.

2 - a - Rappelez la relation qui lie les fonctions d'état enthalpie H et énergie interne U.

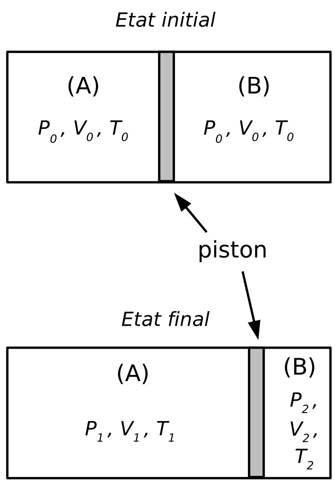
b - Montrez la relation de Mayer : $C_P - C_V = R$

c - Exprimez C_V en fonction de R et γ.

d - n moles d'un gaz parfait évoluent d'un état initial caractérisé par P_0, V_0 jusqu'à un état final caractérisé par P_1, V_1. Montrez que la variation d'énergie interne de ce gaz parfait au cours de cette transformation peut s'écrire :

$$\Delta U = \frac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma - 1}$$

II. Transformations réversibles d'un gaz parfait.



Un cylindre horizontal, de volume invariable, est fermé à ses deux extrémités par deux parois fixes. Ce cylindre est séparé en deux compartiments A et B par un piston $\mathcal{P}$ mobile sans frottement. Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques et de capacités calorifiques négligeables.

Dans l'état initial, les deux compartiments A et B contiennent le même nombre de moles d'un gaz parfait dans le même état P_0, V_0, T_0.

On chauffe le compartiment A à l'aide d'une résistance électrique jusqu'à un état final où la pression dans le compartiment A est $P_1 = 3\ P_0$.

On pourra considérer dans la suite les états du système comme une suite d'états d'équilibre.

1 - Calculez :

a - pour l'état final du compartiment B : la pression P_2, le volume V_2, la température T_2.

b - pour l'état final du compartiment A : le volume V_1, la température T_1.

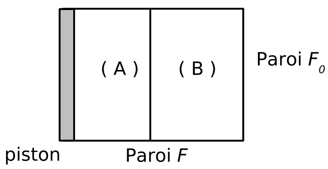
2 - On veut déterminer la quantité de chaleur Q_1 fournie par la résistance chauffante au compartiment A.

a - Montrez que Q_1 s'exprime très facilement en fonction des variations d'énergie interne des gaz des compartiments A et B (ΔU_1 et ΔU_2, respectivement).

b - Donnez l'expression de Q_1 en fonction de P_0, V_0 et γ.

III. Détente irréversible d'un gaz parfait.

Un cylindre horizontal est fermé à l'une de ses extrémités par une paroi fixe $\mathcal{F}_0$, et à l'autre extrémité par un piston $\mathcal{P}$ qui peut coulisser sans frottement le long du cylindre. Le cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe $\mathcal{F}$. Sur la face extérieure du piston s'exerce la pression atmosphérique P_0, que l'on suppose uniforme et constante.



Dans la situation initiale, le compartiment A de volume V_A contient n moles d'un gaz parfait. Le compartiment B de volume V_B est initialement vide.

Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques et de capacités calorifiques négligeables.

1 - Précisez la pression et la température initiales dans le compartiment A.

2 - On perce un orifice dans la paroi $\mathcal{F}$ et on cherche à décrire les caractéristiques du nouvel état d'équilibre que l'on supposera atteint.

a - En analysant qualitativement le problème, montrez que, selon la valeur de V_B par rapport à une valeur seuil V_{B_s} (qu'on ne cherchera pas à déterminer à ce stade de l'étude), deux types de solutions existent ; pour répondre à cette question, on pourra s'intéresser à l'équilibre mécanique du piston dans l'état final.

b - En supposant que V_B est inférieur à la valeur seuil, déterminez les caractéristiques P_1, V_1, T_1 du gaz enfermé dans le cylindre A + B quand le nouvel état d'équilibre est atteint : on exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou de certaines des données P_0, γ, n, V_A, V_B et de R.

c - Déterminez la valeur seuil V_{B_s} en fonction de V_A et de γ.

d - On suppose cette fois que V_B est supérieur à V_{B_s}. Déterminez P_2, V_2, T_2 pour le gaz enfermé à l'intérieur du cylindre dans le nouvel état d'équilibre ; on exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou de certaines des données P_0, γ, n, V_A, V_B et de R.

3 - a - Déterminez l'entropie d'un gaz parfait (à une constante près) en fonction de n, C_P, γ, P et V.

b - Déduisez-en l'expression de la variation d'entropie ΔS_1 du gaz en fonction de n, γ, V_A, V_B et C_P dans le cas où l'état final est celui du 2b. Ce résultat est-il conforme au second principe de la thermodynamique ?

c - Déterminez de la même façon ΔS_2, l'état final étant celui du 2d ; ce résultat est-il conforme au second principe de la thermodynamique ?

B. CYCLE DE CARNOT (d'après CAPESA 2000)

Un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1,4$) décrit de façon réversible, sans changer d'état, un cycle de Carnot récepteur selon les caractéristiques suivantes (les valeurs numériques non données seront à calculer à la question 2) ; $n = 0,01$

Etat 1	Etat 2	Etat 3	Etat 4
$P_1 = 1000$ hPa	$P_2 = 1600$ hPa	$P_3 = 920$ hPa	$P4 = 575$ hPa
$V_1 = 0,24$ l	V_2	V_3	V_4
T_1	T_2	T_3	T_4
$1 \rightarrow 2$ isotherme	$2 \rightarrow 3$ adiabatique	$3 \rightarrow 4$ isotherme	$4 \rightarrow 1$ adiabatique

1 - a - Donnez une définition du gaz parfait (microscopique ou macroscopique).

b - Donnez la définition de γ et précisez les facteurs dont il dépend.

c - Précisez ce qu'est un cycle récepteur.

d - Démontrez la loi de Laplace typique d'une transformation adiabatique quasistatique dans le cas où γ est constant.

2 - a - Calculez les valeurs des volumes et températures inconnus (la constante des gaz parfaits est $R = 8,32$ S.I.).

b - Donnez l'aspect du graphe $P = f(V)$, dit diagramme de Clapeyron du cycle.

3 - Pour chaque transformation :

a - Calculez le travail W mis en jeu.

b - Calculez l'énergie thermique Q, ou chaleur, mise en jeu.

c - Déduisez l'ensemble énergétique $W + Q$. Commentez.

4 - a - Calculez la variation d'entropie ΔS au cours de chaque transformation.

b - Calculez la variation d'entropie totale (ΔS_t) du cycle. Commentez.

c - Donnez l'aspect du graphe $T = f(S)$, dit diagramme entropique.

5 - On suppose que ce cycle est celui d'une thermopompe, ou pompe à chaleur :

a - Schématisez les échanges thermodynamiques entre les deux sources, le système gaz et l'extérieur.

b - Calculez l'efficacité théorique e (ou coefficient de performance) de ce récepteur en fonction des températures.

c - Expliquez comment il faut modifier les températures des sources pour augmenter l'efficacité théorique.

d - Expliquez pourquoi, au niveau thermodynamique, dans la réalité, ce coefficient est bien plus faible.

6 - Précisez ce que représente l'aire de chacun des cycles $P = f(V)$ et $T = f(S)$. Commentez.

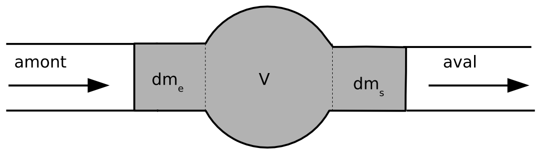
C. SYSTEMES OUVERTS EN REGIME PERMANENT (agrégation interne 2005)

I. Principes et définitions

On étudie l'écoulement d'un fluide dans une canalisation, en régime permanent (aucune grandeur physique du fluide ne dépend explicitement du temps).

En amont, l'état du fluide est décrit par sa pression P_1, sa température T_1, le volume massique v_1, l'énergie interne massique u_1 et l'enthalpie massique h_1. Les grandeurs correspondantes pour l'aval sont notées P_2, T_2, v_2, u_2 et h_2.

On note q_e le transfert thermique ou quantité de chaleur massique reçue par une unité de masse du fluide lors de l'écoulement d'amont en aval ; de même, on note w_i le travail massique reçu, dit utile ou indiqué, autre que celui des forces de pression : ce travail est éventuellement fourni par les parties mobiles de la machine dans laquelle se fait l'écoulement.



L'écoulement est supposé horizontal et lent : on négligera donc les variations d'énergie potentielle de pesanteur et d'énergie cinétique du fluide.

On note Σ le système ouvert constitué par le fluide contenu dans le volume (V) ; on définit de plus un système fermé Σ^*, constitué à l'instant t du fluide contenu dans $\Sigma(t)$ et de la masse élémentaire dm_e qui va entrer dans (V) entre les instants t et $t + dt$. A l'instant $t + dt$, Σ^* est donc constitué du fluide contenu dans $\Sigma(t + dt)$ et de la masse élémentaire dm_s qui est sortie de (V) entre les instants t et $t + dt$.

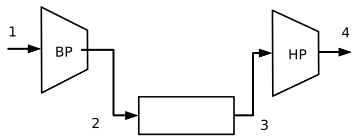
1 - Montrez qu'en régime permanent, $dm_e = dm_s$, noté désormais dm.

2 - Exprimez le travail des forces de pression reçu en amont par la masse $dm_e = dm$ entre t et $t + dt$, en fonction de P_1, v_1 et dm. Exprimez de même le travail des forces de pression reçu en aval par $dm_s = dm$ entre t et $t + dt$.

3 - En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système fermé Σ^*, montrez que : $h_2 - h_1 = w_i + q_e$.

II. Application : compresseur à deux étages

On étudie l'étage de compression d'une turbine à gaz réalisant une compression en deux étapes de l'air (considéré comme un gaz parfait) avec une réfrigération intermédiaire. Les deux compresseurs basse pression (BP) et haute pression (HP) sont considérés comme adiabatiques et les évolutions y sont permanentes et réversibles. La réfrigération (2-3) s'effectue à pression constante.



Etat 1	Etat 2	Etat 3	Etat 4
$P_1 = 1$ bar	P_2	$P_3 = P_2$	$P_4 = a\ P_1$
$T_1 = 300$ K	T_2	$T_3 = T_1$	T_4

On note :

- a le rapport de compression totale cherché : $a = \frac{P_4}{P_1}$.
- r le rapport intermédiaire : $r = \frac{P_2}{P_1}$

La capacité thermique massique à pression constante de l'air est : $c_P = 1,0\,\text{kJ . kg}^{-1}\text{ . K}^{-1}$ et $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1,40$.

1 - Exprimez littéralement le travail indiqué massique total de compression fourni par les parties mobiles des compresseurs à l'air dans l'évolution (1-4) en fonction de c_P, T_1, a, r et γ.

2 - Déterminez la valeur de r qui rend minimal ce travail avec $a = 25$.

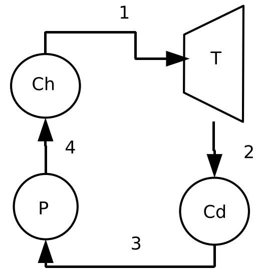
3 - Calculez les températures T_2 et T_4.

4 - La réfrigération de l'air lors de l'évolution (2-3) est assurée par une circulation d'eau liquide qui entre à la température $T_0 = 283$ K et dont la température finale ne doit pas dépasser, pour des raisons écologiques, 293 K. Sachant que le réfrigérant est parfaitement calorifugé, déterminez le débit massique d'eau minimal nécessaire.

On donne la capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_{eau} = 4,18\,\text{kJ . kg}^{-1}\text{ . K}^{-1}$ et le débit massique d'air dans l'installation : $d_{air} = 1,3\,\text{kg . s}^{-1}$.

III. Application : cycle de Rankine d'une machine à vapeur

On étudie en régime permanent une machine motrice à vapeur d'eau dans laquelle l'eau décrit le cycle suivant :



- $1 \to 2$: détente adiabatique et réversible dans la turbine T.
- $2 \to 3$: refroidissement et condensation totale à la pression constante P_2 dans le condenseur Cd.
- $3 \to 4$: compression adiabatique de l'eau liquide dans la pompe P.
- $4 \to 1$: chauffage et vaporisation totale à la pression constante P_1 dans la chaudière Ch : la vapeur est juste saturante à sa sortie (titre en vapeur x = masse vapeur/masse totale = 1).

On résume les données thermodynamiques utiles de l'eau aux deux pressions considérées dans le tableau suivant :

P (bar)	T (K)	h' (kJ . kg^{-1})	s' (kJ . kg^{-1} . K^{-1})	l_V (kJ . kg^{-1})
$P_2 = 0,2$	330	250	0,83	2350
$P_1 = 55$	540	1180	2,97	1600

h' (respectivement s') représente l'enthalpie (respectivement l'entropie) massique du liquide saturant (titre en vapeur $x = 0$); l_V est l'enthalpie massique de vaporisation.

1 - Le travail d'alimentation de la pompe est supposé négligeable. Justifiez cette hypothèse et déduisez que la transformation peut être considérée comme isenthalpique.

2 - Déterminez l'entropie s_2, le titre en vapeur x_2 et l'enthalpie h_2 dans l'état 2.

3 - En utilisant le premier principe de la thermodynamique appliqué aux systèmes ouverts, calculez :

   a - la quantité de chaleur massique q_1 fournie dans la chaudière à $1,0$ kg d'eau.

   b - la quantité de chaleur massique q_2 cédée par $1,0$ kg d'eau au condenseur.

   c - le travail indiqué massique w fourni dans la turbine.

   d - le rendement thermique de cette machine. Comparez votre résultat au rendement du cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures extrêmes.

4 - *Allure du cycle dans le diagramme entropique :*

   Il s'agit du diagramme (T, s) où l'on place en abscisse l'entropie massique s du fluide, et en ordonnée la température T. On pourra considérer que la courbe de saturation a approximativement la même allure que dans le diagramme de Clapeyron (P, v).

a - Déterminez l'allure des isobares à l'intérieur de la courbe de saturation. Placez les isobares P_1 et P_2.

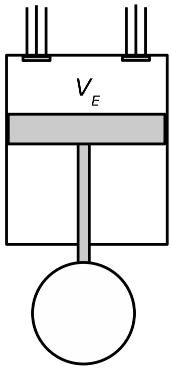
b - On admettra que pendant l'évolution ($3 \to 4$) le fluide se comporte pratiquement à tout instant comme un liquide saturant ($x = 0$). Tracez l'allure du cycle décrit dans le diagramme considéré.

c - Comment est modifiée cette allure si l'évolution dans la turbine est irréversible ?

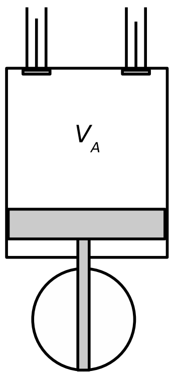
MACHINES THERMIQUES

A. CYCLE DE BEAU DE ROCHAS (d'après CAPES interne 1995)

Le cycle d'un moteur à explosion d'automobile peut être décrit de la manière simplifiée suivante :



point mort haut



point mort bas

– **Premier temps : étape EA**

En E, le piston est au point mort haut.

EA est l'admission du mélange air-carburant à pression et température constantes.

Le piston arrive en A, au point mort bas.

– **Deuxième temps : étapes AB et BC**

AB est une compression adiabatique réversible du mélange.

En B, le piston est au point mort haut et une étincelle électrique allume le mélange.

Durant la transformation BC, la pression passe presque instantanément de P_B à P_C à volume constant.

– **Troisième temps : étape CD**

CD est une détente adiabatique réversible du mélange (air et gaz brûlés).

En D, le piston arrive au point mort bas.

– **Quatrième temps : étapes DA et AE**

DA est un refroidissement à volume constant.

AE est un refoulement à pression et températures constantes.

L'automobile possède quatre cylindres.

Sa cylindrée est $4\ (V_A - V_E)$. Le rapport volumétrique est $a = \frac{V_A}{V_E}$.

Dans la notice technique de l'automobile (boîte 5 rapports), on lit les indications suivantes :

Caractéristiques principales :

Alésage × course (mm) : $75,8 \times 77$;

Cylindrée (cm^3) : 1390 ;

Rapport volumétrique : $9,5$ / 1 ;

Pression de compression : 14 bars ;

Puissance fiscale : 6 (boîte 4 rapports) - 7 (boîte 5 rapports) ;

Puissance maxi : DIN (ch/tr/min) 80/5 750

ISO (kW/tr/min) 57,5/5 750

Couple maxi : DIN (m.kg/tr/min) 11/2 750
ISO (N.m/tr/min) 106/2 750

Caractéristiques de la voiture :

Combinaison des vitesses	Rapports de boîte	Démul. avec couple 0,2459	Vit. (km/h) pour 1000 tr/min. (*)
1ère	0,2683	0,0659	6,828
2ème	0,4883	0,1200	12,429
3ème	0,7567	0,1860	19,260
4ème	1,0344	0,2543	26,328
5ème	1,2580	0,3093	32,049
M.AR.	0,2820	0,0693	7,178

(*) avec pneumatiques 165/70 R13, circonférence de roulement sous charge 1 725 mm

Consommation de la voiture à 90 km/h : 5,1 L/100 km.

On supposera pour tout l'exercice que l'automobile roule à 90 km/h en 5e vitesse. Le carburant utilisé est assimilable à du 2,2,4-triméthylpentane de formule brute C_8H_{18}, de masse volumique égale à 720 kg/m^3. Sa combustion dégage une quantité de chaleur égale à 5,5 . 10^3 kJ/mol.

Données :

Masses molaires atomiques (g/mol) : C = 12 ; H = 1.

R = 8,31 J . mol^{-1} . K^{-1}.

Température à l'admission : $T_E = 77°C$.

Pression d'admission :$P_E = 1,0$. 10^5 Pa.

On fera d'autre part l'approximation suivante : l'air étant en grand excès par rapport au carburant, on assimilera le mélange qui décrit le cycle EABCDAE à un gaz parfait unique, de coefficient $\gamma = 1,4$ et de masse molaire $M = 29,0$ g . mol^{-1}.

1 - Tracez l'allure du cycle EABCDAE dans un diagramme de Watt (pression en ordonnées, volume en abscisses).

2 - Calculez la vitesse angulaire du moteur.

3 - a - Calculez la durée de la compression AB (on rappelle qu'un cycle EABCDAE à quatre temps correspond à un tour de l'arbre moteur). Quelle hypothèse est ainsi justifiée ?

b - Comparez la vitesse moyenne du piston dans la transformation AB à un ordre de grandeur de la vitesse moyenne d'agitation thermique des molécules en A. Quelle hypothèse est ainsi justifiée ?

4 - Calculez la pression et la température du gaz dans l'état B.

5 - Calculez la consommation de carburant par cycle, pour un cylindre.

6 - a - Calculez la quantité de chaleur Q_{BC} reçue par le gaz au cours de la combustion (pour un cylindre).

b - Déduisez la température, puis la pression du gaz en C.

7 - Calculez la température et la pression du gaz dans l'état D.

8 - Pour chacune des étapes AB, BC, CD, DA, calculez la chaleur et le travail reçus par le gaz. Interprétez les signes obtenus pour chacune de ces grandeurs.

9 - a - Définissez le rendement thermodynamique du cycle : η.

b - Calculez numériquement η à partir des résultats de la question 8.

c - Montrez que $\eta = 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}$. Calculez numériquement η à l'aide de cette formule.

B. MOTEUR A COMBUSTION INTERNE (d'après CAPES externe 1996)

I. Préliminaires

1 - On considère un système fermé.

a - Qu'est ce qu'un système fermé ?

b - Enoncez le premier principe de la thermodynamique pour un système fermé subissant une transformation finie, c'est à dire non élémentaire, l'amenant d'un état 1 à un état 2.

c - Que traduit le premier principe de la thermodynamique ?

2 - On considère un système fermé constitué par n moles d'un gaz considéré comme parfait, pour lequel la capacité thermique molaire à volume constant C_{vm} est constante.

a - Rappelez l'expression de l'équation d'état du système.

b - Donnez l'expression de la différentielle de l'énergie interne du système en fonction de la température.

c - Le système subit une transformation isentropique.

- Qu'est ce qu'une transformation isentropique ?
- La quantité $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$ étant supposée constante, montrez que la grandeur $TV^{\gamma-1}$ reste invariante au cours de la transformation.

On rappelle que pour un gaz parfait $C_{vm} = \frac{R}{(\gamma-1)}$.

II. Etude du moteur

On considère un moteur à combustion interne à allumage par bougies. On se limite à l'étude de l'un des cylindres du moteur.

Le cycle thermodynamique décrit par le fluide est le cycle de Beau de Rochas. Les différente étapes du cycle sont les suivantes :

- MA : admission du mélange gazeux air-essence à la pression constante P_0.
  En A il y a fermeture de la soupape d'admission et le volume V est égal à V_{max}.
- AB : compression supposée isentropique du mélange.
  Dans l'état B, le volume est égal à V_{min}.
- BC : échauffement isochore du gaz.
- CD : détente isentropique du gaz.
  Dans l'état D le volume est V_{max}.
- DA : refroidissement isochore du gaz.
- AM : refoulement du gaz vers l'extérieur, à la pression P_0.

On convient de nommer "taux de compression" le rapport $t = \frac{V_{max}}{V_{min}}$.

Le système envisagé est le gaz qui décrit le cycle ABCD. La quantité de gaz n (mol) considérée est celle qui a été admise dans l'état A.

Le transfert thermique de l'étape BC est dû à la combustion interne du mélange gazeux admis. Les réactifs et les produits de la réaction sont gazeux.

Dans une approche simplifiée on admettra que la quantité de gaz n'est pas modifiée par la combustion interne. Le gaz est assimilé à un gaz parfait pour lequel les capacités thermiques molaires C_{pm} et C_{vm} sont constantes.

1 - Donnez la représentation du cycle dans un diagramme de Clapeyron où l'on porte en ordonnée la pression P du fluide et en abscisse le volume V du gaz contenu dans la chambre du cylindre.

2 - Soit Q_1 le transfert thermique (ou chaleur échangée) mis en jeu dans l'étape BC.

   a - Exprimez Q_1 en fonction de n, C_{vm}, T_B et T_C.

   b - Précisez le signe de cette grandeur.

   c - Dans quel sens s'effectue le transfert thermique ?

3 - Soit Q_2 le transfert thermique mis en jeu dans l'étape DA. Exprimez Q_2 en fonction de n, C_{vm}, T_D et T_A.

4 - Exprimez W le travail total échangé au cours du cycle ABCD en fonction de Q_1 et Q_2.

5 - Définissez le rendement thermodynamique η du moteur. Exprimez η en fonction de Q_1 et Q_2.

6 - Exprimez η en fonction de T_A, T_B, T_C et T_D, puis en fonction de t et γ. Calculez η pour les valeurs suivantes $t = 10$ et $\gamma = 1,33$.

7 - On envisage maintenant un moteur dont la cylindrée est égale à 2 litres. On raisonnera sur un cylindre, possédant la cylindrée C_y du moteur définie selon : $C_y = V_{max} - V_{min}$. Le taux de compression est $t = 10$.

Le mélange gazeux contient 1 mole de carburant pour 60 moles de mélange ; il est admis à la température $T_A = 320$ K sous la pression $P_A = 100$ kPa.
On donne $\gamma = 1,33$ et $R = 8,134$ J . K^{-1} . mol^{-1}.

a - Calculez les valeurs de V_{max} et V_{min}.

b - Calculez la quantité $n'(mol)$ de gaz de carburant consommée par cycle.

c - En admettant que le pouvoir calorifique du carburant utilisé est égal à 4200 kJ par mole de carburant, calculez les valeurs de la température et de la pression dans l'état C du cycle.

d - Calculez la valeur du transfert thermique vers l'extérieur au cours d'un cycle du moteur.

e - Calculez la valeur de la puissance du moteur lorsque la vitesse de rotation du villebrequin est égale à 4000 tours par minute.

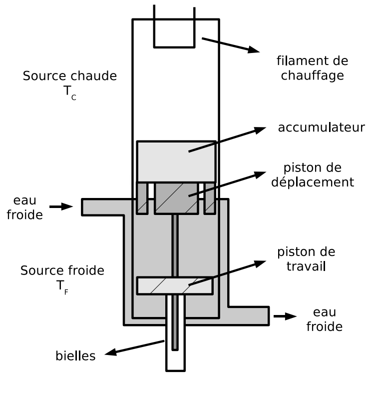
f - Dans la pratique, le rendement est beaucoup plus faible. Donner au moins deux raisons rendant compte de cette différence.

C. MACHINE THERMIQUE DE STIRLING (d'après CAPES externe 2003)

On se propose de déterminer quelques caractéristiques thermodynamiques d'une machine thermique ditherme à but didactique fonctionnant suivant le cycle dit de Stirling.

Dans son principe, la machine comprend un cylindre, un piston de déplacement P_d, un piston de travail P_t, ainsi qu'un accumulateur d'énergie A et enferme une masse donnée constante d'un gaz actif, en l'occurrence ici de l'air. Un filament métallique parcouru par un courant chauffe l'air dans la partie supérieure du cylindre à la température T_c et la partie inférieure est en contact avec la source froide, à la température T_f (refroidissement assuré par une circulation d'eau en continu dans une chemise entourant la partie inférieure du piston de travail).

Le piston de déplacement est percé d'orifices permettant un déplacement dans les deux sens de l'air enfermé entre la partie supérieure du cylindre chauffé et la partie inférieure refroidie à l'eau.



Les deux pistons sont reliés à l'arbre de rotation du moteur par l'intermédiaire d'un jeu d'embiellages tel qu'un cycle correspond à une rotation d'un tour complet de l'arbre.

Le cycle de Stirling est modélisé suivant les quatre évolutions théoriques :

– *compression isotherme :* de 1 à 2 à la température T_f de la source froide par la montée du piston de travail P_t, du volume V_1 jusqu'au volume V_2.

– *chauffage isochore :* de 2 à 3 jusqu'à la température T_c de la source chaude par la descente du piston de déplacement qui envoie le gaz à travers l'accumulateur A.

– *détente isotherme :* à T_c de 3 à 4 jusqu'au volume initial V_1 par la descente des deux pistons.

– *refroidissement isochore :* de 4 à 1 jusqu'à la température T_f par la remontée du piston de déplacement seul, forçant le gaz à traverser une nouvelle fois l'accumulateur, cette fois de haut en bas et en cédant de la chaleur.

Les grandeurs massiques associées aux grandeurs extensives (V, U, H, S, ...) seront notées en lettres minuscules : v, u, h, s, ...

On rappelle l'identité thermodynamique : $du = T\,ds - Pdv$

Le gaz actif utilisé dans la machine thermique est de l'air, assimilé à un gaz parfait de capacité thermique massique à volume constant c_V supposée indépendante de la température et de rapport $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ constant. On rappelle que $c_V = \frac{r}{\gamma-1}$ où $r = \frac{R}{M}$ est la constante massique du gaz étudié, R désignant la constante des gaz parfaits et M la masse molaire équivalente de l'air. On prendra $\gamma = 1,4$.

I. Préliminaires : le diagramme entropique ; le cycle de Carnot

1 - a - Proposez en quelques lignes une définition du mot *chaleur* (ou *transfert thermique*).

b - Proposez en quelques lignes une réponse à donner à un élève de classe terminale scientifique qui a rencontré dans un article de vulgarisation le terme *entropie* et souhaite connaître le sens de ce mot.

c - On appelle diagramme entropique le diagramme $T(s)$ donnant en ordonnée la température thermodynamique T (en Kelvin) en fonction de l'entropie massique s du fluide. On considère une évolution réversible représentée par l'arc de courbe MM' dans le diagramme entropique. Que représente l'aire sous la courbe MM' ?

d - On considère maintenant l'évolution cyclique réversible d'une masse donnée quelconque. On appelle diagramme de Clapeyron le diagramme $P(v)$ donnant en ordonnées la pression P au sein du fluide en fonction du volume massique v du fluide. Que représente l'aire du cycle dans le diagramme de Clapeyron ? Justifiez que les aires du cycle en coordonnées $P(v)$ et $T(s)$ sont égales.

2 - On étudie plus particulièrement le cycle de Carnot, constitué de deux isothermes (à T_f et T_c avec $T_f < T_c$) séparées par deux adiabatiques réversibles.

a - Tracez l'allure du cycle de Carnot dans le diagramme entropique et précisez en justifiant la réponse le sens de parcours sur le cycle pour un fonctionnement en moteur thermique.

b - Définissez le rendement thermodynamique η d'un moteur thermique. Dans le cas du cycle de Carnot, montrez qu'il s'écrit simplement comme un rapport d'aires dans le diagramme entropique qu'on précisera. En déduire que $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}$.

3 - a - Déduisez de l'identité thermodynamique rappelée plus haut l'expression de la différentielle ds de l'entropie massique d'un gaz parfait de capacité thermique massique c_V et de constante massique r, en fonction de T, v, r et c_V.

b - Etablisez dans le diagramme entropique l'équation $T(s)$ d'une évolution isochore pour l'air considéré comme un gaz parfait.

II. Le cycle de Stirling idéal

1 - Tracez l'allure du cycle de Stirling à air dans le diagramme entropique. Montrez que $s_3 - s_2 = s_4 - s_1$.

2 - Le transfert thermique du tronçon $4-1$ au tronçon $2-3$ est effectué à l'aide d'opérations qui sont décalées dans le temps, cela par stockage interposé, à l'aide de l'accumulateur A. On suppose que ce récupérateur fonctionne de façon idéale et réversible, de sorte que l'énergie thermique stockée par l'accumulateur lors de l'évolution $4-1$ est intégralement redonnée au gaz lors de l'évolution $2-3$. Comment doit-on choisir la capacité thermique et la conductibilité thermique de l'accumulateur A pour que son fonctionnement se rapproche le plus possible du cas idéal ?

III. Rendement du cycle de Stirling réel

Le gaz cède à l'accumulateur A la chaleur $q_E = q_{4-1}$ lors du refroidissement isochore. L'accumulateur fonctionnant avec une efficacité α réduite ($\alpha < 1$), seule une partie αq_E est redonnée au gaz lors de l'échauffement isochore $2-3$, de sorte que la source chaude doit apporter au gaz le complément de chaleur $(1-\alpha)q_E$. L'aire du cycle n'est pas modifiée par cet échange de chaleur incomplet.

1 - Exprimez le rendement réel $\eta_{réel}$ du cycle à échangeur imparfait et écrivez-le sous la forme : $\eta_{réel} = \frac{\eta_{Carnot}}{1+f(a,\alpha,\gamma,k)}$ où f est une fonction de γ, α, a et k seulement, avec $a = \frac{V_1}{V_2}$ et $k = \frac{T_f}{T_c}$.

2 - Pour une efficacité α de l'accumulateur, un rapport volumétrique a et un rapport des températures k fixés, comment varie $\eta_{réel}$ avec γ ? En justifiant la réponse, indiquez s'il vaut mieux utiliser un gaz monoatomique ou diatomique pour optimiser le rendement.

3 - La source chaude du moteur Stirling est obtenue par le chauffage d'un filament porté au rouge, parcouru par un courant alternatif sinusoïdal. La résistance à froid du filament est d'environ $0,9\ \Omega$. On mesure simultanément la tension aux bornes du filament et l'intensité du courant qui le traverse par la méthode "ampèremètre - voltmètre". On lit $U_{eff} = 11,70$ V et $I_{eff} = 12,20$ A.

a - Précisez en justifiant la réponse s'il vaut mieux réaliser un montage courte dérivation ou un montage longue dérivation. Vous indiquerez sur un schéma la position des différents éléments. Calculez la puissance électrique moyenne reçue par le filament.

b - Lors d'un essai du moteur à air chaud (pour lequel on prendra $\gamma = 1,4$), on a mesuré : $T_f = 293$ K ; $T_c = 533$ K ; $a = 1,6$; une fréquence de rotation de l'arbre du moteur $f = 6,3$ Hz pour une aire du cycle évaluée à $6,1$ Joules en valeur absolue. Calculez le rendement thermodynamique du moteur ainsi que l'efficacité α de l'accumulateur.

D. THERMODYNAMIQUE DES REFRIGERATEURS (d'après CAPESA 2001)

I. Etude des deux principes de la thermodynamique.

Une machine thermique ditherme échange avec l'extérieur au cours d'un cycle, un travail W et les quantités de chaleur Q_1 (avec une source chaude à la température T_1) et Q_2 (avec une source froide à la température T_2).

1 - A partir des deux principes de la thermodynamique, montrez que :

$$W + Q_1 + Q_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

2 - Montrez qu'un cycle moteur monotherme est impossible (énoncé historique de Kelvin du second principe).

3 - On se place dans le diagramme de Raveau (système d'axes Q_2 en abscisse et Q_1 en ordonnée).

a - Donnez le lieu des points correspondant à un cycle réversible.

b - Déterminez le demi-plan interdit par le second principe pour une machine thermique.

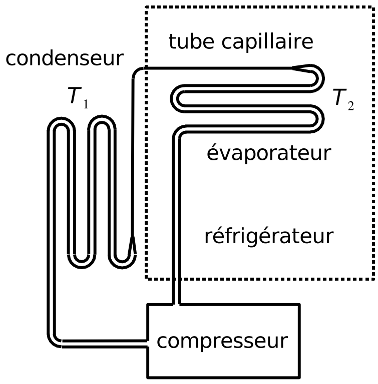
c - Tracez la droite Δ, lieu des points correspondant à un travail échangé nul.

d - D'après les questions précédentes, le domaine possible dans le diagramme de Raveau, pour une machine thermique, se partage en quatre domaines (qui seront notés I, II, III, et IV sur votre diagramme). Parmi ces quatre domaines, deux sont sans intérêt ; les deux autres correspondent aux moteurs et aux récepteurs.

Pour chacun de ces domaines, réalisez le schéma de la machine correspondante, en faisant figurer les échanges thermodynamiques selon la convention de la normale entrante. Précisez le moteur et le récepteur.

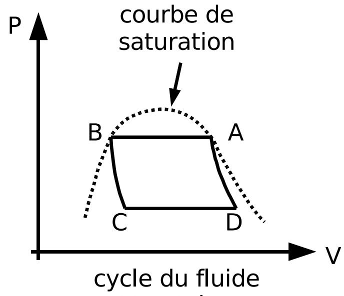
II. Etude d'un réfrigérateur à compression.

Dans un réfrigérateur à compression, le fluide frigorigène décrit un cycle de Carnot constitué de deux transformations isothermes réversibles et de deux transformations isentropiques :



– dans le condenseur (le serpentin à l'extérieur du réfrigérateur, source chaude à la température T_1), le fluide passe de l'état gazeux à l'état liquide ($A \to B$).
– le passage dans le détendeur (tube capillaire) produit une détente que l'on peut considérer comme isentropique ($B \to C$).
– dans l'évaporateur (point froid du réfrigérateur à la température T_2), le fluide continue à se détendre et à se vaporiser ($C \to D$) en recevant la quantité de chaleur Q_2 venant des aliments conservés à l'intérieur du réfrigérateur.
– la dernière étape du cycle a lieu dans le compresseur (compression qui ramène le fluide à l'état gazeux, à la température T_1).

1 - Définissez la courbe de saturation.
2 - Schématisez les échanges thermodynamiques entre les deux sources, le fluide frigorigène et l'extérieur.
3 - Représentez le diagramme entropique de ce cycle.
4 - Définissez l'efficacité théorique e_t du réfrigérateur.
5 - Etablissez, par une méthode analytique, l'expression de e_t en fonction des températures T_1 et T_2.
6 - Retrouvez l'expression de e_t par une méthode graphique à l'aide du diagramme entropique.
7 - En pratique, l'efficacité est plus faible. Expliquez pourquoi.



cycle du fluide frigorigène

III. Etude d'un réfrigérateur à absorption

Ce type de réfrigérateur est basé sur la variation de la solubilité des gaz dans les liquides en fonction de la température ; il fonctionne schématiquement avec trois sources de chaleur dont les températures sont constantes et vérifient : $T_1 > T_2 > T_3$.

Le fluide frigorifique décrit un cycle entre trois sources :

– une source chaude (à la température T_1) à laquelle il prend une quantité de chaleur Q_1.

- une source froide (à la température T_2) à laquelle il prend une quantité de chaleur Q_2.
- une source intermédiaire (à la température T_3) à laquelle il cède une quantité de chaleur Q_3.

Aucun travail n'est fourni au fluide : il suffit de maintenir la source chaude à la température constante T_1 par chauffage (ce système est utilisé sur les petits réfrigérateurs portatifs de camping).

1 - Schématisez les échanges thermodynamiques entre les sources et le fluide.

2 - A partir des deux principes de la thermodynamique, établissez les bilans énergétique et entropique.

3 - Définissez l'efficacité e_t de ce type de machine.

4 - Etablissez l'expression de e_t en fonction des températures T_1, T_2 et T_3 (on suppose le cycle réversible).

5 - Calculez e_t pour $T_1 = 350$ K, $T_2 = 265$ K et $T_3 = 300$ K.

6 - Calculez l'efficacité e_t d'un réfrigérateur à compression utilisant les sources aux températures $T_1 = 350$ K et $T_2 = 265$ K précédentes. Commentez le résultat.

TRANSITIONS DE PHASES

A. CHANGEMENTS D'ETAT D'UN CORPS PUR (d'après Agrégation externe 1993)

I. Diagrammes d'équilibre

1 - Décrivez brièvement deux expériences illustrant la notion de changement d'état d'un corps pur.

2 - a - Donnez l'allure du diagramme d'état (p, T) d'un corps pur pouvant exister sous les trois phases solide, liquide, vapeur, dans le cas général.

b - Précisez la signification des courbes et des domaines qu'elles délimitent.

c - Définissez la notion de point triple et citez une application en métrologie.

d - Précisez la signification concrète du point critique.

3 - a - En quoi le diagramme d'état de l'eau est-il particulier ?

b - Décrivez et interprétez brièvement l'expérience dite du "regel" consistant à placer sur un bloc de glace un fil métallique tendu à ses deux extrémités par deux poids. De quelle(s) caractéristique(s) du fil dépend le phénomène observé ?

4 - Tracez l'allure des isothermes dans un diagramme de Clapeyron où on porte en ordonnée la pression p et en abscisse le volume massique v. Vous vous limiterez aux domaines correspondant à une phase liquide, une phase gazeuse, ou un mélange liquide-vapeur. Placez la courbe d'ébullition et la courbe de rosée.

II. Chaleur latente de changement d'état

Pour une transition de phase $1 \to 2$ faisant passer un corps pur d'une phase 1 à une phase 2, on définit la chaleur latente molaire $L_{1\to 2}$ comme la chaleur reçue par une mole de ce corps lors de cette transition effectuée réversiblement à p et T constantes.

1 - La chaleur latente molaire de vaporisation d'un fréon utilisé dans une machine frigorifique vaut $L_v = 17$ kJ.mol^{-1} à $T = 300$ K. Calculez le taux de compression $\frac{p_F}{p_1}$ lors d'une compression isotherme à $T = 300$ K faisant passer une mole de gaz parfait de la pression p_1 à la pression p_F, pour que la chaleur cédée par le gaz soit égale à L_v. Commentez.

2 - a - Etablissez les expressions des variations d'entropie molaire S_2 - S_1 et d'enthalpie molaire H_2 - H_1 au cours d'une transition de phase $1 \to 2$ en fonction de $L_{1\to 2}$ et de la température T de la transition

b - Déduisez que l'enthalpie libre molaire $G = H - TS$ est conservée au cours de la transition de phase et commentez en liaison avec I.2.

3 - Dans un dispositif maintenu à température T constante, une ampoule de volume V_L contient initialement 1 mole d'eau liquide à $T = 100°C$ sous $p = 1$ bar. On casse l'ampoule dans une enceinte initialement vide et, dans l'état final, l'enceinte de volume V_V contient 1 mole d'eau vapeur à $T = 100°C$ sous $p = 1$ bar. On donne la pression de vapeur saturante de l'eau à $100°C$: $p_{vs} = 10^5$ Pa $=$ 1 bar.

   a - Calculez la chaleur Q reçue par l'eau en fonction de L_v, p, V_L et V_V et commentez.

   b - Calculez la variation d'entropie de l'eau, celle du thermostat et celle de l'univers au cours cette évolution en fonction de L_v, p, T, V_L et V_V et commentez.

4 - a - En partant de la conservation de l'enthalpie libre G, établissez la formule de Clapeyron reliant la chaleur latente molaire $L_{1\to 2}$, la différence des volumes molaires $V_2 - V_1$, la température T et la pente $\frac{dp}{dT}$ le long de la courbe d'équilibre $1 \to 2$.

   b - Déduisez une interprétation structurale du signe de la pente $\frac{dp}{dT}$ pour l'équilibre solide-liquide de l'eau.

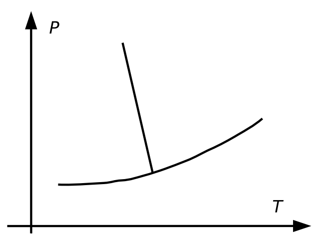
5 - Des glaçons flottent dans un verre rempli d'eau liquide, l'ensemble étant maintenu à $T = 0°C$ sous $p = 1$ bar. Une partie des glaçons est émergée ; pourquoi ? Les glaçons flondent totalement. Comment évolue le niveau de l'eau dans le verre ? Jusitifez la réponse.

B. DIAGRAMME DE PHASES DE L'EAU (d'après CAPES interne 1991)

Le diagramme de phases de l'eau est représenté en coordonnées P et T.

1 - Complétez le diagramme en précisant les domaines d'existence des différentes phases.

2 - Placez les points caractéristiques sur le diagramme et indiquez brièvement ce qu'ils représentent.



3 - Définissez la pression de vapeur saturante. De quel(s) paramètre(s) dépend cette grandeur ?

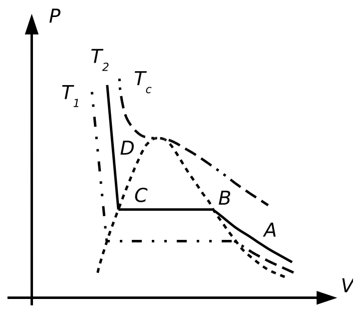
4 - Quelle particularité possède la courbe d'équilibre des phases liquide et solide ? Quelle conséquence peut-on en déduire ?

5 - On donne le réseau d'isothermes correspondant aux phases liquide et vapeur d'une mole d'eau.

a - Précisez les domaines d'existence des deux phases. Comment nomme-t-on la courbe en pointillés ?

b - Proposez une schématisation simple de l'expérience permettant de réaliser la transformation ABCD. Décrivez l'état du système au cours des différents stades de la transformation.

c - Reproduisez le diagramme (P, T) et représentez la transformation ABCD en précisant la position des points A, B, C et D.



6 - Différenciez brièvement les phénomènes d'ébullition et d'évaporation dans l'atmosphère.

7 - Le degré hygrométrique de l'air contenu dans une enceinte à la température T est le rapport de la pression partielle de vapeur d'eau présente dans l'enceinte à la pression de vapeur saturante à cette température. Ce nombre s'exprime en pourcentage. Sachant que la pression de vapeur saturante de l'eau à $20\ ^\circ C$ est 2300 Pa, calculez la masse d'eau contenue dans 1 m^3 d'air à $20\ ^\circ C$, dont le degré hygrométrique est 70 %. On assimilera l'air à un gaz parfait. On donne la constante des gaz parfaits $R = 8,31$ J . mol^{-1} . K^{-1} et la masse molaire de l'eau $M = 18$ g . mol^{-1}.

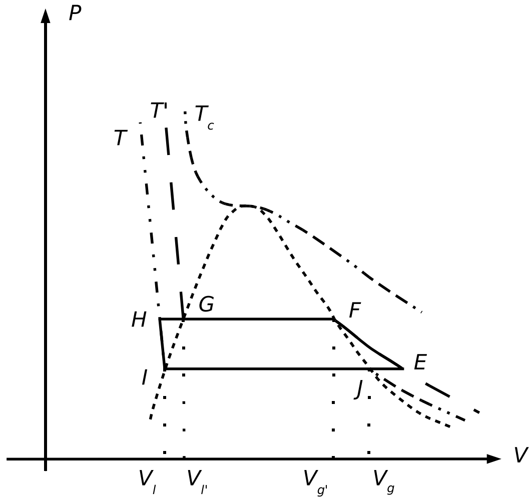
8 - Dans cette question, on s'intéresse à l'évolution de la chaleur latente L de vaporisation en fonction de la température.

a - Définissez la chaleur latente molaire de vaporisation de l'eau.

b - Une mole d'eau subit la transformation EFGHIJE représentée en coordonnées P et V. Les volumes molaires de l'eau liquide respectivement aux températures T et T' sont notés V_l et V_l'. De même, V_g et V_g' sont les volumes molaires de la vapeur d'eau aux températures T et T'. Au cours de cette transformation, on néglige les volumes molaires de l'eau liquide face aux volumes molaires de la vapeur d'eau. On admet de plus que la dilatation ou la compression isothermes quasi-statiques de l'eau liquide s'effectuent sans échange thermique avec le milieu extérieur. D'autre part, les capacités calorifiques molaires C_{pl} et C_{pg}, respectivement des phases liquide et vapeur, sont considérées comme étant indépendantes de la température. On indique que C_{pl} est supérieure à C_{pg}. Enfin, la vapeur d'eau sera assimilée à un gaz parfait. Représentez le cycle étudié sur le diagramme des phases en coordonnées P et T.

c - On appelle L et L' les chaleurs latentes molaires de vaporisation aux températures T et T'. Appliquez le premier principe de la thermodynamique au cycle considéré et déterminez l'expression de la différence $L - L'$ en fonction de C_{pl}, C_{pg}, T et T'.

d - Déduisez que la chaleur latente molaire de vaporisation peut s'écrire sous la forme $L = L_0 - aT$ où L_0 et a sont deux constantes positives.


P
T'
T_c
T
G
H
F
E
I
J
V
V_l
$V_{l'}$
$V_{g'}$
V_g

TRANSFERTS THERMIQUES

A. TRANSFERT DE CHALEUR (d'après CAPES externe 2001)

I. Généralités.

1 - Quels sont les différents processus de transfert thermique ? Associez, chaque fois que cela est possible, une loi (ou son nom) au mode de transfert considéré. Donnez des exemples pris dans la vie courante, où ces différents processus interviennent.

2 - Pour décrire les transferts d'énergie thermique, on fait parfois intervenir le vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_Q}$, que l'on définit par son flux $d\phi$ à travers une surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$ orientée de (1) vers (2) : le flux élémentaire $d\phi = \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{dS}$ représente la puissance thermique échangée à travers $\overrightarrow{dS}$, fournie par (1) et reçue par (2).

Le flux $d\phi$ étant une grandeur algébrique, explicitez le sens des transferts effectifs de puissance thermique entre (1) et (2) à travers $\overrightarrow{dS}$ lorsque $d\phi$ est positif, puis lorsque $d\phi$ est négatif.

3 - L'expression mathématique de $\overrightarrow{j_Q}$ dans le cas du transfert de chaleur à travers un milieu solide est de la forme $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\, \overrightarrow{\nabla} T$, λ représentant la conductivité thermique du milieu ($\lambda > 0$).

On rappelle l'expression en coordonnées cartésiennes de l'opérateur gradient $\overrightarrow{\nabla}$:

$$\overrightarrow{\nabla} T(x, y, z, t) = \frac{\partial T}{\partial x}\, \overrightarrow{e_x} + \frac{\partial T}{\partial y}\, \overrightarrow{e_y} + \frac{\partial T}{\partial z}\, \overrightarrow{e_z}$$

a - Expliquez la signification du signe " moins" qui intervient dans l'expression de $\overrightarrow{j_Q}$.

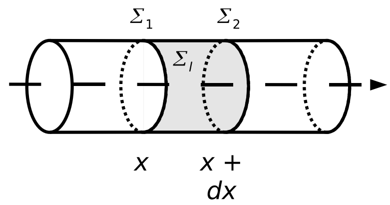
b - Rappelez l'unité de λ.

II. L'équation de la chaleur à une dimension.

Soit un solide de conductivité thermique λ, auquel est attaché le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Sa chaleur massique est notée c, sa masse volumique est notée ρ. Les grandeurs λ, ρ et c seront supposées uniformes et stationnaires. A l'intérieur du solide, la température T est une fonction de la seule variable de position x et du temps t. On note donc $T(x, t)$ cette fonction.

1 - Avec ces hypothèses, donnez l'expression simplifiée de $\overrightarrow{j_Q}$ en fonction de λ, d'une dérivée partielle de T et d'un vecteur de base unitaire.

2 - On considère une portion de solide cylindrique d'axe (Ox) délimitée par la surface fermée constituée des surfaces Σ_1, Σ_2 et Σ_l. Les points de Σ_1 ont tous la même abscisse x, ceux de Σ_2 ont pour abscisse $x + dx$. On note S l'aire des surfaces Σ_1 et Σ_2. La surface Σ_l est une portion de cylindre de hauteur dx dont les génératrices sont parallèles à l'axe (Ox). On suppose par ailleurs qu'il n'y a pas de source thermique dans le solide.



a - Soit δQ_1 la quantité de chaleur élémentaire cédée par la portion de solide à travers la surface Σ_1 entre l'instant t et l'instant $t + dt$. Exprimez δQ_1 en fonction de λ, S, dt et d'une dérivée partielle de T. On aura soin de préciser les valeurs des variables de la dérivée partielle.

b - De même, δQ_2 représente la quantité de chaleur élémentaire cédée par la portion de solide à travers la surface Σ_2 entre l'instant t et l'instant $t + dt$. Exprimez δQ_2 en fonction de λ, S, dt et d'une dérivée partielle de T. On aura soin de préciser les valeurs des variables de la dérivée partielle.

c - Justifiez que la portion de solide n'échange aucune énergie thermique à travers Σ_l.

d - Soit $\delta^2 Q$ la quantité de chaleur totale reçue par la portion de solide entre les instants t et $t + dt$. Reliez $\delta^2 Q$ à δQ_1 et δQ_2. Exprimez ensuite $\delta^2 Q$ en fonction d'une dérivée de T, et de λ, S, dt et dx.

e - Reliez également $\delta^2 Q$ à la variation entre ces deux instants de la température dT de la portion étudiée. On fera intervenir les grandeurs ρ, c, S et dx.

f - Exprimez la variation de température dT entre les instants t et $t + dt$ en fonction d'une dérivée partielle de $T(x, t)$ et de dt. Déduisez des trois questions précédentes que l'on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Précisez l'expression de a en fonction de la masse volumique ρ, de la chaleur massique c et de la conductivité thermique λ. Cette relation constitue l'équation de la chaleur à une dimension. Le coefficient a est appelé diffusivité thermique.

III. Diffusion de la chaleur dans le sol.

Le sol est assimilé à un milieu solide homogène de masse volumique ρ, de chaleur massique c et de conductivité thermique λ. Il occupe le demi-espace d'équation $z < 0$, et est surmonté par l'air dont la température moyennée sur une durée assez longue (de l'ordre du mois) évolue au rythme des saisons. On note $T_{air}(t)$ cette température moyennée sur un mois, et on modélise son évolution dans le temps par une variation sinusoïdale centrée sur la valeur moyenne annuelle de la température notée T_m :

$$T_{air}(t) \;=\; T_m \;+\; T_A \cos(\; \omega t \;+\; \varphi \;)$$

La pulsation ω correspond à une période égale à un an. Par ailleurs, T_m est supposée constante. De même, on note $T(M,t)$ la température moyennée sur un mois au point $M(x,y,z)$ du sol à l'instant t. La situation étant invariante par translation selon les directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ du plan (Oxy), T n'est fonction que de z et de t.

Par hypothèse, la température du sol en contact avec l'air en $z \;=\; 0$ est la même que la température de l'air qui le surplombe, ce qui fournit une première condition limite :

$$T(\; z=0,t\;) \;=\; T_{air}(t) \;=\; T_m \;+\; T_A \cos(\; \omega t \;+\; \varphi \;)$$

1 - En faisant coïncider l'origine des temps avec le moment le plus froid de l'année (pris au 1er Février), quelle est la valeur de φ ? On suppose que T_A est positif.

2 - On pose $\theta(z,t) \;=\; T(z,t) \;-\; T_m$. A z fixé, $\theta(z,t)$ est une fonction sinusoïdale du temps, car on se situe en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω. On introduit la fonction complexe :

$$\underline{\theta}(z,t) \;=\; \underline{\theta}_A(z)\; exp(j\omega t) \qquad \text{avec} \qquad j^2 \;=\; -1\;,$$

et l'on recherche les solutions de l'équation de la chaleur sous la forme :

$$T(z,t) \;=\; T_m \;+\; Re\,[\;\underline{\theta}(z,t)\;]$$

Dans cette partie, on notera que l'équation de la chaleur a pour expression :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \;=\; a\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

la diffusivité thermique a ayant l'expression déterminée à la question 2.

a - Justifiez que $\theta(z,t)$, puis $\underline{\theta}(z,t)$ sont solutions de l'équation de la chaleur.

b - Etablissez l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\theta}_A(z)$.

c - Donnez la forme générale de la solution en $\underline{\theta}_A(z)$, puis en $\underline{\theta}(z,t)$.

d - Dans les deux termes que comporte $\underline{\theta}(z,t)$, identifiez celui qui correspond à une onde se propageant dans le sens des z croissants, et celui qui correspond à une onde se propageant dans le sens des z décroissants. Lequel de ces deux termes est physiquement inacceptable et pourquoi ? Déduisez la valeur de l'une des deux constantes d'intégration qui interviennent dans l'expression de $\underline{\theta}_A(z)$.

e - Déterminez l'expression de l'autre constante d'intégration et fournissez l'expression définitive de $T(z,t)$ dans le sol.

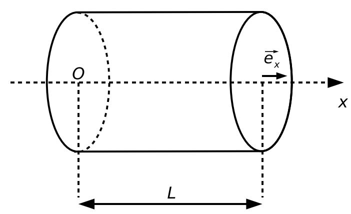
3 - On donne $a \;=\; 3\;.\;10^{-7}$ S.I. La valeur numérique de ω se déduit de l'énoncé.

a - Soit une cave dont la profondeur moyenne vaut $\mid z_m \mid$. On admet que la température de cette cave est la même que celle du sol voisin de la côte z_m. A quelle profondeur faut-il creuser une cave pour que l'amplitude des variations annuelles de température ne soit plus que le dixième de ce qu'elle est à l'extérieur ?

b - A quel moment de l'année fait-il le plus froid dans la cave creusée à une telle profondeur ?

B. TRANSFERTS THERMIQUES (d'après CAPES externe 1998)

On considère un milieu continu homogène et isotrope de masse volumique μ, de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ. Ces trois grandeurs sont supposées constantes. Ce milieu occupe un cylindre d'axe Ox et de section d'aire S. On suppose que le cylindre est parfaitement calorifugé. La température $T(x,t)$ du milieu ne dépend que de l'abscisse x du point étudié et du temps t.



On rappelle que lorsque la température d'un corps n'est pas uniforme, celui-ci est le siège de transferts thermiques. On note $P_{th}(x,t)$ la puissance thermique (ou flux thermique) qui traverse la section droite du cylindre d'abscisse x à la date t dans le sens des x positifs.

On suppose que le milieu satisfait à la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th}(x,t) \;=\; -\,\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\,\vec{e}_x \qquad \text{où} \qquad \vec{j}_{th}(x,t) \;=\; j_{th}(x,t)\,\vec{e}_x$$

représente le vecteur densité de flux thermique et $\vec{e}_x$ représente le vecteur unitaire de l'axe des abscisses x. On rappelle enfin que le flux du vecteur $\vec{j}_{th}(x,t)$ à travers la surface S orientée par le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ est égal à la puissance thermique $P_{th}(x,t)$:

$$P_{th}(x,t) \;=\; \vec{j}_{th}(x,t)\;.\;S\,\vec{e}_x$$

On suppose que le régime permanent est établi, ainsi les grandeurs thermiques comme la température, la puissance thermique et le vecteur densité de flux thermique ne dépendent pas du temps t.

I. Résistance thermique

I. i. Equation relative à la température

1 - Justifiez qualitativement la présence d'un signe moins dans la loi de Fourier.

2 - Donnez les unités de la puissance thermique P_{th} et de la conductivité thermique λ.

3 - On désire effectuer un bilan énergétique. Pour cela, on étudie la portion élémentaire du cylindre comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

a - Justifiez que la quantité de chaleur qui rentre dans la portion élémentaire de cylindre par la surface située à l'abscisse x pendant la durée élémentaire dt est égale à $j_{th}.S.dt$.

b - Exprimez de même la quantité de chaleur qui sort de la portion élémentaire de cylindre à travers la surface située à l'abscisse $x + dx$ pendant dt.

c - En effectuant un bilan énergétique pendant dt et en négligeant les pertes d'énergie par la surface latérale de la portion élémentaire du cylindre, démontrez que la température T du milieu satisfait à l'équation suivante :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \tag{1}$$

I. ii. Résistance thermique

On porte la température de la section d'équation $x = 0$ à une valeur constante T_A et celle de la section d'équation $x = L$ à une valeur constante T_B.

1 - a - En utilisant l'équation (1), déterminez la loi $T(x)$ donnant la température en un point d'abscisse x du cylindre.

b - Représentez la fonction $T(x)$ en fonction de x dans le cas où $T_A > T_B$.

2 - Soit $P_{th}(x)$ la puissance thermique qui traverse la section droite du cylindre d'abscisse x dans le sens des x positifs.

a - Justifiez que $P_{th}(x)$ ne dépend pas de la variable x. On notera P_{th} cette grandeur.

b - On définit la résistance thermique R_{th} de la barre de longueur L par la relation :

$$T_A - T_B = R_{th}\, P_{th}$$

Exprimez la résistance thermique R_{th} en fonction de L, S et λ ; précisez l'unité de R_{th}.

c - En faisant une analogie avec l'électrocinétique, justifiez le terme de "résistance" thermique.

3 - On associe en série deux cylindres de même section S semblables à celui décrit dans la question précédente. Le premier, de conductivité thermique λ_1, est compris entre $x = 0$ et $x = L_1$; le second, de conductivité thermique λ_2, est compris entre $x = L_1$ et $x = L_1 + L_2$. On pourra noter respectivement T_A, T_B et T_C les températures des sections d'équations $x = 0$, $x = L_1$ et $x = L_1 + L_2$.

a - Déterminez la résistance thermique de l'ensemble formé par les deux cylindres.

b - Concluez quant à la loi d'association en série des résistances thermiques.

c - De la même façon, déterminez, en la justifiant, la loi d'association en parallèle des résistances thermiques.

4 - *Application : le double vitrage*

a - Déterminez numériquement la valeur de la résistance thermique d'une vitre de surface égale à 1 m^2 formée d'une plaque de verre d'épaisseur $e = 4$ mm et de conductivité thermique $\lambda_V = 0,8$ W.K^{-1}.m^{-1}.

b - Cette vitre sépare une pièce portée à la température $T_{int} = 20°C$ de l'extérieur où règne une température $T_{ext} = 0°C$. Evaluez la puissance thermique transférée vers l'extérieur à travers une surface de vitre de 1 m^2.

c - Déterminez numériquement la valeur de la résistance thermique d'un double vitrage de surface égale à 1 m^2, formé d'une plaque de verre d'épaisseur $e_1 = 1$ mm et de conductivité thermique $\lambda_V = 0,8$ W.K^{-1}.m^{-1}, d'une épaisseur $e_2 = 2$ mm d'air sec de conductivité thermique $\lambda_a = 0,026$ W.K^{-1}.m^{-1} et d'une autre plaque de verre d'épaisseur $e_1 = 1$ mm et de conductivité thermique $\lambda_V = 0,8$ W.K^{-1}.m^{-1}.

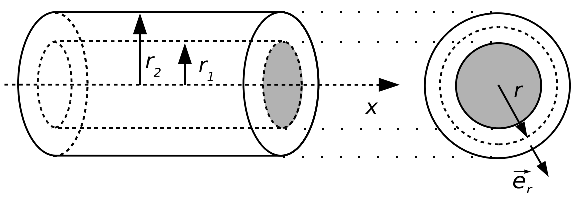
d - Ce double vitrage sépare une pièce portée à la température $T_{int} = 20°C$ de l'extérieur où règne une température $T_{ext} = 0°C$. Evaluez la puissance thermique transférée vers l'extérieur à travers le double vitrage.

e - Commentez vos résultats.

Il faut noter q'une étude plus complète doit prendre en compte les échanges conducto-convectifs de part et d'autre de la vitre.

II. Etude thermique d'un fil électrique

On considère un fil électrique rectiligne d'axe $x'x$ composé d'un coeur en cuivre de conductivité électrique γ et de rayon r_1, entouré d'une gaine plastique en PVC de conductivité thermique λ_g, de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2.



Le coeur en cuivre est parcouru par un courant électrique d'intensité I uniformément réparti dans une section droite ; la chaleur produite par effet Joule est évacuée radialement par la gaine vers le milieu ambiant dont la température est T_a.

Le régime est supposé stationnaire et la température dans la gaine ne dépend que de la distance r du point M considéré à l'axe du fil : $T(r)$. La loi de Fourier s'écrit alors :

$$\vec{j}_{th}(r) = -\lambda_g \, . \, \frac{dT}{dr} \, . \, \vec{e}_r$$

où $\vec{j}_{th}(r)$ représente le vecteur densité de flux thermique et $\vec{e}_r$ représente le vecteur unitaire radial.

1 - On désire déterminer la résistance thermique d'une portion de longueur L de la gaine de PVC.

a - Exprimez la puissance thermique P_{th} qui traverse, en direction de l'extérieur, la portion de cylindre d'axe $x'x$ de longueur L et de rayon r compris entre r_1 et r_2 en fonction de r, L, $\vec{j}_{th}(r)$ et $\vec{e}_r$.

b - Montrez que la résistance thermique $R_{th,1}$ de la portion de longueur L de la gaine s'exprime par la relation :

$$R_{th,1} = \frac{1}{\lambda_g \, 2\pi L} \,.\, \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

c - Déterminez la valeur numérique de la résistance thermique $R_{th,1}$ de la portion de longueur L de la gaine pour les valeurs suivantes : $L = 1$ m , $\lambda_g = 0,15$ W.K^{-1}.m^{-1} , $r_1 = 0,69$ mm et $r_2 = 1,45$ mm.

d - Proposez une analogie avec un calcul de résistance électrique en électrocinétique.

2 - On étudie maintenant les échanges thermiques conducto-convectifs entre la gaine et l'air ambiant. On introduit pour cela un coefficient h de transfert thermique de surface qui permet de chiffrer la puissance thermique P_{th} qui traverse la surface externe S de la portion de longueur L de la gaine en direction de l'air :

$$P_{th} = h \,.\, (\, T(r_2) - T_a \,) \,.\, S$$

a - Donnez l'expression de la résistance thermique $R_{th,2}$ associée à ce transfert thermique en fonction de h, L et r_2.

b - Calculez numériquement $R_{th,2}$. On donne $r_2 = 1,45$ mm , $L = 1$ m et $h = 10$ W.K^{-1}.m^{-1}.

c - Comparez $R_{th,1}$ et $R_{th,2}$.

3 - La portion du fil en cuivre de longueur L, de conductivité électrique γ, est parcourue par un courant d'intensité I.

a - Déterminez la résistance électrique R_e de la portion de fil étudiée en fonction de γ, L et r_1.

b - Déduisez l'expression littérale de la puissance P_J disispée par effet Joule dans cette portion de fil en fonction de R_e et I.

c - *Application numérique* : donnez, sous la forme d'un tableau, les valeurs numériques des puissances dissipées par effet Joule pour $L = 1$ m, $\gamma = 5,8.10^7\ \Omega^{-1}$.m^{-1}, $r_1 = 0,69$ mm et successivement pour les intensités $I = 10$ A, puis $I = 20$ A et $I = 30$ A .

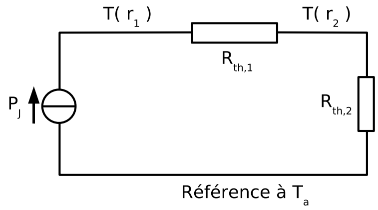
4 - On se place encore en régime stationnaire et on étudie une portion de fil de longueur L. La puissance P_J déterminée dans la question précédente est transportée par la gaine vers le milieu ambiant. On désire estimer la température de la gaine.

a - En utilisant les résultats des questions précédentes, exprimez les températures $T(r_1)$ et $T(r_2)$ en fonction de P_J, $R_{th,1}$, $R_{th,2}$ et T_a.

b - Donnez, sous la forme d'un tableau, pour $I = 10$ A, puis $I = 20$ A et $I = 30$ A, les valeurs numériques de $T(r_1)$ et $T(r_2)$ en utilisant les valeurs numériques trouvées précédemment. Vous prendrez $T_a = 25°C$.

c - Commentez vos résultats numériques sachant que la température de fusion du PVC est de l'ordre de $135°C$.

d - En utilisant les analogies avec l'électrocinétique, justifiez que le schéma thermique équivalent à la portion de fil étudiée est le suivant :



III. Régime thermique transitoire

III. i. Equation de la diffusion thermique

On considère à nouveau un milieu continu homogène et isotrope de masse volumique constante μ, de capacité thermique massique constante c et de conductivité thermique constante λ qui occupe un cylindre d'axe Ox et de section d'aire S. Ce cylindre est parfaitement calorifugé et la température $T(x,t)$ du milieu ne dépend que de l'abscisse x du point étudié et du temps t.

On désire prendre en compte le régime transitoire.

1 - On désire effectuer un bilan énergétique. Pour cela, on étudie la portion élémentaire du cylindre comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

a - Montrez que la variation d'énergie interne de la portion élémentaire de cylindre pendant la durée élémentaire dt s'écrit :

$$\mu \,.\, c \,.\, S \,.\, dx \,.\, \frac{\partial T}{\partial t} \,.\, dt$$

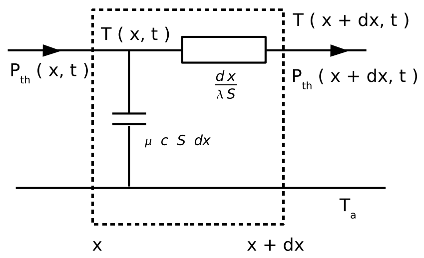
b - En effectuant un bilan énergétique pendant dt et en négligeant les pertes d'énergie par la surface latérale de la portion élémentaire de ce cylindre, montrez que la température T du milieu satisfait à "l'équation de la diffusion thermique" :

$$\mu \,.\, c \,.\, \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \,.\, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

2 - On désire retrouver "l'équation de la diffusion thermique" en travaillant par analogie avec l'électricité. On suppose pour cela que :

– la puissance thermique $P_{th}(x,t)$ est l'analogue de l'intensité électrique.
– la température $T(x,t)$ est l'analogue du potentiel électrique.
– la résistance thermique est l'analogue de la résistance électrique.
– la capacité thermique est l'analogue de la capacité électrique.

Le schéma thermique équivalent de la portion du cylindre comprise entre x et $x + dx$ est représenté ci-dessous. La référence des températures est prise égale à T_a, la température ambiante.



a - En utilisant l'analogue de la loi des noeuds, montrez que : $\frac{\partial P_{th}}{\partial x} = -\mu \,.\, c \,.\, S \,.\, \frac{\partial T}{\partial t}$

b - Justifiez de même l'équation : $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda S} \,.\, P_{th}$

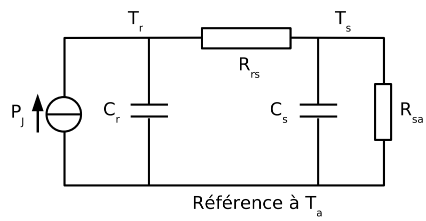
c - Retrouvez "l'équation de la diffusion thermique".

III. ii. Etude thermique d'un moteur électrique

On s'intéresse aux transferts thermiques dans un petit moteur à courant continu. Le moteur comprend :

- un rotor modélisé par un cylindre de cuivre de rayon $R_1 = 25$ mm, de longueur $L = 0,1$ m, de masse volumique $\mu_{Cu} = 8,9.10^3$ kg.m^{-3} et de capacité thermique massique $c_{Cu} = 385$ J.K^{-1}.kg^{-1}.
- un entrefer compris entre R_1 et $R_2 = 26$ mm.
- un stator modélisé par un cylindre creux de fer de rayon intérieur $R_2 = 26$ mm, de rayon extérieur $R_3 = 50$ mm, de longueur $L = 0,1$ m, de masse volumique $\mu_{Fe} = 7,6.10^3$ kg.m^{-3} et de capacité thermique massique $c_{Fe} = 460$ J.K^{-1}.kg^{-1}.

Pour modéliser le comportement thermique de ce moteur, on suppose que la température du rotor est uniforme : $T_r(t)$. On suppose de même que la température du stator $T_s(t)$ n'est fonction que du temps. Enfin, on note T_a la température de l'air ambiant supposée constante. La figure ci-contre propose un schéma thermique du moteur.



La puissance $P_J = 100$ W est produite par effet Joule dans le rotor, les capacités thermiques du rotor et du stator sont respectivement notées C_r et C_s, les résistances thermiques valent respectivement $R_{rs} = 0,8$ K.W^{-1} et $R_{sa} = 0,2$ K.W^{-1}. La température ambiante T_a est égale à $20°C$.

1 - Justifiez, de manière qualitative, pourquoi on peut supposer que la température est uniforme dans le volume du rotor.

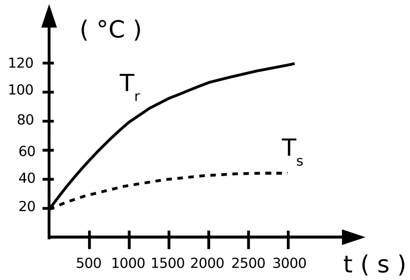
2 - Déterminez un système de deux équations différentielles vérifié par les fonctions T_r et T_s.

3 - a - Donnez les valeurs numériques des températures T_r et T_s obtenues au bout d'un temps très long.

b - Déterminez numériquement la valeur de la capacité thermique du rotor C_r.

c - Calculez de même la capacité thermique du stator C_s.

4 - La figure ci-dessous donne une représentation des lois horaires des fonctions $T_r(t)$ et $T_s(t)$. Commentez qualitativement et quantitativement ces deux tracés.

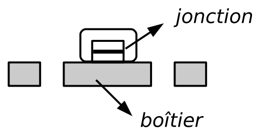


IV. Refroidissement d'un composant électronique

IV. i. Refroidissement d'un transistor

On étudie le refroidissement d'un transistor du type 2 N 3055. On supposera que le régime permanent est établi.

Pour modéliser thermiquement le comportement du transistor, on introduit les températures de jonction T_j, du boîtier T_b et de l'air ambiant T_a. On définit également les résistances thermiques R_{jb} entre la jonction et le boîtier et R_{ba} entre le boîtier et l'air.



1 - *Transistor sans dissipateur thermique*

a - On suppose que la température maximale admissible par la jonction est égale à T_{max}. Exprimez la puissance maximale P_{max} que l'on peut dissiper dans le transistor en fonction de T_{max}, T_a et des résistances thermiques R_{jb} et R_{ba}.

b - Calculez numériquement P_{max} pour $T_{max} = 200°C$, $T_a = 25°C$, $R_{jb} = 1,5$ K . W^{-1} et $R_{ba} = 38,5$ K . W^{-1}

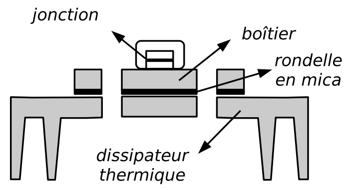
c - Avec les valeurs numériques précédentes, calculez numériquement la température T_b du boîtier.

d - Pour éviter le vieillissement prématuré du composant, il est préférable de limiter la température de la jonction à $100°C$. Calculez alors numériquement la puissance que l'on peut dissiper dans le composant. On prendra les valeurs suivantes : $T_a = 25°C$, $R_{jb} = 1,5$ K . W^{-1} et $R_{ba} = 38,5$ K . W^{-1}

2 - *Transistor avec dissipateur thermique*

Pour pouvoir dissiper une puissance beaucoup plus élevée, on couple thermiquement par l'intermédiaire d'une rondelle en mica le boîtier du transistor à un dissipateur de chaleur.

Pour modéliser thermiquement le comportement du transistor et du dissipateur, on introduit les températures de jonction T_j, du boîtier T_b et de l'air ambiant T_a. On définit également les résistances thermiques R_{jb} entre la jonction et le boîtier, R_{bd} entre le boîtier et le dissipateur, et R_{da} entre le dissipateur et l'air.

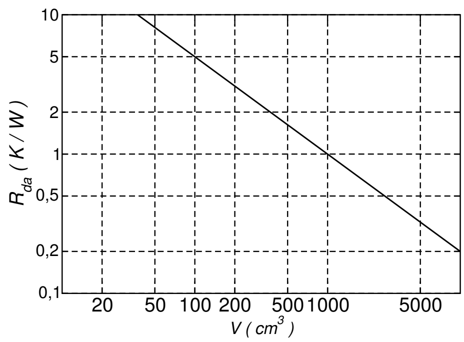


a - On désire dissiper une puissance $P = 20$ W dans le transistor. Déterminez la valeur numérique de la résistance R_{da} qu'il faut choisir pour que la température T_j de la jonction soit égale à $100°$C. On donne $T_a = 25°$C, $R_{jb} = 1,5$ K . W^{-1} et $R_{bd} = 0,75$ K . W^{-1}

b - Déterminez numériquement la température T_d du dissipateur dans les conditions de la question précédente.

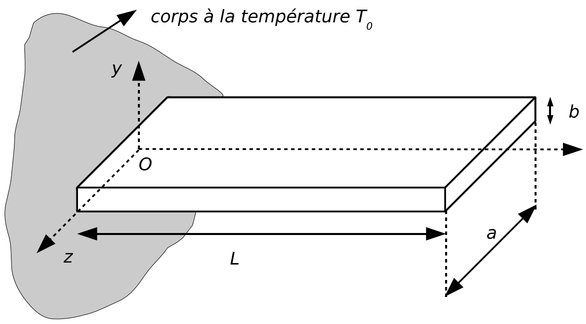
c - Le diagramme ci-contre représente la courbe qui relie la résistance R_{da} au volume V d'un dissipateur à ailettes en aluminium, défini comme le volume V du parallélépipède circonscrit au dissipateur.

Donnez l'ordre de grandeur du volume du dissipateur thermique qu'il faut choisir pour obtenir en pratique la résistance thermique R_{da} déterminée précédemment.



IV. ii. Etude simplifiée d'une ailette de refroidissement

Une ailette de refroidissement en aluminium de conductivité λ_{Al} est fixée à un corps dont la température T_0 est constante et baigne dans l'air ambiant dont la température constante est notée T_a. Cette ailette de forme parallélépipèdique a une longueur L, une largeur a et une hauteur b. Le corps à la température T_0 occupe le demi-espace $x < 0$.



On formule les hypothèses suivantes :

- le régime étudié est stationnaire
- la température d'un point de l'ailette n'est fonction que de x : $T(x)$

– la puissance φ_{cc} par unité de surface cédée par l'ailette à l'air extérieur par les échanges thermiques conducto-convectifs s'exprime comme : $\varphi_{cc} = h \,.\, (\,T(x) - T_a\,)$

– a est très grand devant b

On posera : $m^2 = \frac{2h}{b\lambda_{A1}}$

1 - a - On étudie la portion de l'ailette comprise entre x et $x + dx$. Effectuez un bilan énergétique sur cette portion élémentaire de l'ailette et montrez que la température $T(x)$ de l'ailette vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2 \,.\, (\,T - T_a\,) = 0$$

b - Justifiez les deux conditions aux limites suivantes vérifiées par la fonction T :

$$T(0) = T_0 \qquad \text{et} \qquad -\lambda_{A1} \,.\, \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = h \,.\, (\,T(L) - T_a\,)$$

c - Intégrez l'équation différentielle précédente et donnez la loi de variation de T en fonction de x.

2 - *Approximation de l'ailette isotherme*

L'aluminium étant un bon conducteur de la chaleur, on suppose que la température de l'ailette est approximativement constante et égale à T_0.

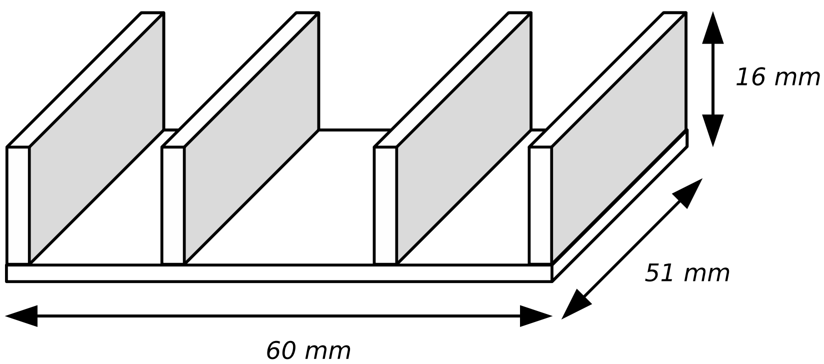
a - En évaluant la surface de contact entre l'ailette et l'air ambiant, donnez l'expression de la puissance thermique P'_{th} échangée entre l'ailette et l'air ambiant en fonction de h, L, a, T_a et T_0.

b - Déterminez la puissance thermique P_{th} échangée entre le corps à la température T_0 et l'air ambiant pour une surface d'aire égale au produit ab, c'est à dire en l'absence d'ailette.

c - On définit l'efficacité η de l'ailette par le rapport $\eta = \frac{P'_{th}}{P_{th}}$. Donnez l'expression de l'efficacité de l'ailette en fonction de L et b.

d - Calculez numériquement cette grandeur pour $L = 2$ cm et $b = 1$ mm.

e - On désire, dans cette question, évaluer la résistance thermique d'un dissipateur thermique en aluminium en le supposant isotherme.



i. Evaluez la surface de contact entre le dissipateur et l'air en supposant que le boîtier du composant électronique occupe le tiers de la surface de base du dissipateur.

ii. Définissez et évaluez numériquement la résistance thermique du dissipateur supposé isotherme en prenant $h = 15$ W . K^{-1} . m^{-2}.

iii. Commentez et critiquez cette détermination de la résistance thermique du dissipateur.

C. ETUDE D'UN AUTOCUISEUR (d'après CAPES interne 1993)

Caractéristiques de l'ambiant :

- ◇ température : $T_0 = 20\,°C = 293$ K.
- ◇ pression : $P_0 = 1,013 \,.\, 10^5$ Pa $= 1,013$ bar.

Caractéristiques de l'eau :

- ◇ chaleur massique du liquide : $c = 4\,180$ J . kg^{-1} . K^{-1}.
- ◇ extrait des tables des phases liquide et vapeur de l'eau en équilibre :

Pression (bar)	Température (°C)	Volume massique (m^3 . kg^{-1}) liquide	Volume massique (m^3 . kg^{-1}) vapeur	Chaleur latente de vaporisation (kJ . kg^{-1})
0,0234	20	0,001002	57,840	2453
1,0131	100	0,001043	1,673	2257
1,2079	105	0,001047	1,419	2243
1,4326	110	0,001051	1,210	2230
1,6905	115	0,001056	1,036	2215

Caractéristiques du récipient (cylindre d'acier inoxydable) :

- ◇ masse (couvercle compris) : $m = 4,2$ kg.
- ◇ capacité thermique massique : $c_r = 460$ J . kg^{-1} . K^{-1}.
- ◇ dimensions intérieures : diamètre : $D = 28$ cm ; hauteur : $h = 16$ cm.

Conditions initiales :

On met $1,0$ litres d'eau dans l'autocuiseur à la température ambiante. On ferme le couvercle muni de sa soupape. A la date $t = 0$ s, on commence à chauffer à l'aide d'une plaque électrique fournissant une puissance effective $\mathcal{P} = 2,0$ kW au système.

I. Durée du chauffage.

1 - Considérons les hypothèses suivantes :

– l'air surmontant l'eau est sec ; on néglige toute formation de vapeur.
– la température T de l'ensemble eau + air + récipient est uniforme ; on l'exprime en degrés Celsius.
– on néglige les pertes thermiques entre le récipient et l'ambiant.
– on néglige la chaleur nécessaire au chauffage de l'air.

Calculez le temps t au bout duquel l'ensemble atteindra la température de $100\ °C$.

2 - On tient compte des pertes par convection entre le récipient et l'extérieur. La puissance perdue P' est supposée proportionnelle à l'écart de température entre le système et l'ambiant :

$$P' = K(T - T_0) \qquad \text{avec} \qquad K = 4,0\ \text{W.K}^{-1}$$

Les autres hypothèses restant inchangées, reprenez le calcul du temps de chauffage de $20\ °C$ à $100\ °C$.

3 - Pensez-vous qu'il soit réaliste de négliger la formation de vapeur d'eau avant que l'on ait atteint la température de $100\ °C$?

II. Etude du régime établi.

On considère que la pression dans l'autocuiseur a atteint la valeur de régime $P = 1,69$ bar. A ce moment, l'air a entièrement été chassé et la phase vapeur interne est entièrement constituée de vapeur d'eau en équilibre avec le liquide. On continue à chauffer avec une puissance de $2,0$ kW. La soupape s'est mise en rotation rapide, laissant s'échapper un jet caractéristique.

1 - Quelle est la température qui règne à l'intérieur de l'autocuiseur ?

2 - Quelle masse de vapeur surmonte l'eau liquide ? (On suppose que la masse de liquide reste sensiblement égale à 1 kg : on est au début de cette phase).

3 - Avec quel débit (mesuré en grammes par seconde) l'eau s'échappe-t-elle par la soupape ?

4 - Sous quel état physique se présente le jet observé : vapeur, eau liquide ou mélange des deux ? Quelle est sa température ? (Les réponses appellent des raisonnements clairs plutôt que de longs calculs).

III. Retour à la température ambiante.

On arrête le chauffage, la soupape se referme hermétiquement dès que la pression intérieure est inférieure à $1,69$ bar. On laisse revenir le système à la température ambiante de $20\ °C$.

1 - Expliquez pourquoi le couvercle semble alors collé au récipient.

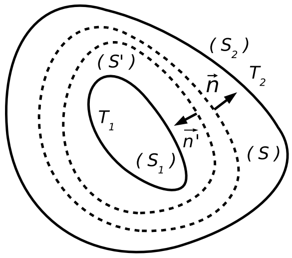
2 - Calculez la force qu'il faudrait exercer sur le couvercle pour arriver à le décoller.

3 - Pourquoi est-il beaucoup plus simple d'ouvrir alors la soupape ?

D. RESISTANCES THERMIQUES (d'après Agrégation externe 1997)

I. Résistance thermique : analogie électrique

Soit un matériau homogène soumis à un gradient de température stationnaire. On étudie les échanges thermiques dus à l'inhomogénéité du champ de température au sein de ce matériau.



On considère un volume V compris entre deux surfaces S_1 et S_2 constituant deux isothermes respectivement maintenues aux températures T_1 et T_2.

Soient deux surfaces quelconques telles que S et S' entièrement contenues dans le volume V.

1 - En régime stationnaire, le champ de vecteurs courant thermique volumique $\vec{j}_{th}$ satisfait l'équation locale :

$$\operatorname{div} \vec{j}_{th} = 0$$

Déduisez que l'on peut exprimer le flux thermique total $\phi_{th,1\to2}$ dans le volume V, orienté de la surface S_1 vers la surface S_2, indifféremment à l'aide de l'une des surfaces S ou S', en choisissant convenablement le sens de la normale.

2 - Exprimez la résistance thermique R_{th} du volume V, définie par :

$$R_{th} = \frac{(T_1 - T_2)}{\phi_{th,1\to2}}$$

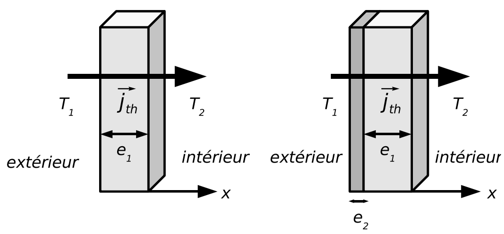
en fonction de deux intégrales du courant thermique volumique $\vec{j}_{th}$ que vous préciserez.

3 - Quelle est l'unité de résistance thermique dans le système international ?

4 - Montrez, en vous appuyant sur une analogie avec l'électrocinétique, que l'on peut en déduire les lois d'association des résistances thermiques en série et en parallèle.

II. Application : Isolation thermique d'un mur

On considère le mur extérieur d'une maison, supposé homogène, constitué de briques pleines que l'on souhaite doubler de plaques de matériau isolant thermique à base de laine de verre. Ce mur sépare une pièce, à la température T_1, du milieu extérieur, à la température T_2.



On donne la surface S du mur, la conductivité thermique λ_1 de la brique, l'épaisseur e_1 du mur de briques. Le matériau isolant a une conductivité thermique λ_2. On ne considère que les échanges thermiques par conduction. On suppose que le problème est à une dimension cartésienne selon la coordonnée x normale au plan de surface S et l'on se place en régime stationnaire.

On donne les valeurs : $S = 20\ \text{m}^2$; $e_1 = 15\ \text{cm}$; $T_1 = 20°\text{C}$; $T_2 = 5°\text{C}$; $\lambda_1 = 1{,}16\ \text{W.m}^{-1}$; $\lambda_2 = 4 \,.\, 10^{-2}\ \text{W.m}^{-1}$

1 - Calculez littéralement puis numériquement le flux thermique qui traverse le mur de briques non doublé.

2 - Déterminez littéralement puis numériquement l'épaisseur e_2 du matériau isolant que l'on doit appliquer contre le mur pour diviser les pertes thermiques par un facteur 5. Cette valeur vous paraît-elle plausible ? Justifiez votre réponse et critiquez éventuellement le modèle proposé.

E. FORMATION D'UNE COUCHE DE GLACE (d'après Agrégation externe 1997)

On se propose d'étudier la croissance d'une couche de glace à la surface d'un lac. L'eau du lac, en phase liquide, est à la température de l'équilibre eau-glace à la pression atmosphérique, soit $T_c = 273$ K supposée constante. L'air au-dessus du lac est à la température $T_a = 263$ K, également supposée constante.

Le lac, non gelé à l'instant initial $t = 0$, se recouvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur à l'instant t sera notée $l(t)$. Le problème est à une variable d'espace : la variable cartésienne x normale à la surface du lac sur laquelle on choisit l'origine $x = 0$; on oriente l'axe Ox de la surface vers le fond du lac.

Soit μ la masse volumique de la glace, λ son coefficient de conductivité thermique, L_f sa chaleur latente de fusion. On admettra que l'on peut négliger sa capacité thermique. Les échanges thermiques à l'interface glace-air se font essentiellement par convection ; le flux thermique échangé dans le sens glace $\rightarrow$ air est donné, pour une surface d'échange S, par :

$$\phi_{th}(t) = \alpha(T_0(t) - T_a) S$$

où $T_0(t)$ est la température de la glace à l'interface glace-air, soit en $x = 0$, à l'instant t.

1 - Ecrivez l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait localement et à chaque instant le champ de température $T(x,t)$ dans la couche de glace déjà formée. Montrez que l'approximation qui consiste à négliger la capacité thermique de la glace permet d'exprimer à chaque instant le champ $T(x,t)$ comme une fonction affine de x dont les coefficients sont des fonctions du temps t. Exprimez $T(x,t)$ en fonction de x, T_c, $T_0(t)$ et $l(t)$.

2 - Ecrivez les flux thermiques traversant une surface S normale à l'axe $0x$, correspondant d'une part au phénomène d'échange thermique lié à la solidification de l'eau à l'interface glace-eau liquide, d'autre part à l'échange par convection à l'interface air-glace, ainsi que le flux thermique de conduction au sein de la couche de glace. Déduisez deux équations reliant l'épaisseur de glace $l(t)$ formée à l'instant t et la température de la couche de glace en $x = 0$, $T_0(t)$.

3 - Montrez, en découplant les équations précédentes, que l'on obtient des lois de variation ayant les formes suivantes :

$$l(t) = l_0 \left[\left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

et :

$$T_0(t) = A + B\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

où l_0, τ, A et B sont des constantes que vous exprimerez en fonction des données du problème.

4 - On donne les valeurs numériques : $\mu = 9 \,.\, 10^2$ kg . m^{-1} ; $\lambda = 2,1$ W . m^{-1} . K^{-1} ; $L_f = 3,34 \,.\, 10^5$ J . kg^{-1} ; $\alpha = 41,8$ W . m^{-2} . K^{-1}.

Calculez numériquement les coefficients l_0, τ, A et B en adoptant le centimètre pour unité de longueur et l'heure pour unité de temps. Donnez l'allure des courbes représentant $l(t)$ et ($T_0(t) - A$)

SUJET DU CAPES EXTERNE 2000

Les systèmes thermodynamiques envisagés sont tels qu'aucune réaction chimique ou nucléaire ne s'y déroule et on néglige les variations de l'énergie potentielle de pesanteur. On se place dans le cadre de la thermodynamique classique en excluant tout aspect statistique.

A. PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

1 - Enoncez le premier principe sous la forme la plus générale pour un système fermé quelconque en notant U l'énergie interne du système.

2 - Pour un système de pression uniforme P :

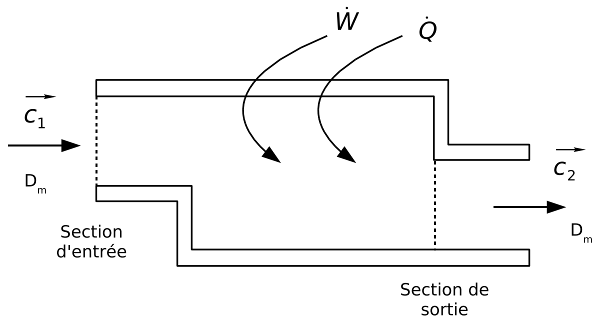
   a - Définissez l'enthalpie H.

   b - Précisez l'unité de H.

3 - Pour un système, on distingue le travail W_p des forces pressantes sur les frontières et le travail $W_{n.p.}$ des autres forces. Pour une évolution du système fermé de l'état initial à l'état final, on note avec l'indice i les caractéristiques de l'état initial et avec l'indice f les caractéristiques de l'état final.

   Exprimez $U_f - U_i$ en tenant compte du fait que les états d'équilibre thermodynamique ne sont pas nécessairement des états de repos macroscopique.

4 - On considère un fluide s'écoulant en régime permanent dans une canalisation d'une section amont repérée par l'indice 1, à une section aval repérée par l'indice 2. Les conditions dans une section sont supposées uniformes. On note par une lettre minuscule les grandeurs massiques ; ainsi, pour un système de masse m contenant n moles, on a $U = n\,U_{mol} = m\,u$ avec u, l'énergie interne massique.



On note :

– T : température du fluide.

– h : enthalpie massique du fluide.

– c : vitesse macroscopique du fluide dans le laboratoire.

– D_m : débit masse (masse de fluide s'écoulant par unité de temps).
– $\dot{Q}$: puissance calorifique échangée avec l'extérieur.
– $\dot{W}$: puissance mécanique échangée avec l'extérieur (la puissance des forces de pression au niveau des surfaces d'entrée et de sortie n'est pas incluse dans ce terme).

a - Montrez que le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\left[\left(h_2+\frac{1}{2}\,{c_2}^2\right)\ -\ \left(h_1+\frac{1}{2}\,{c_1}^2\right)\right]\ D_m\ =\ \dot{W}\ +\ \dot{Q}$$

Pour cela, on pourra étudier entre t et $t+dt$ le système fermé qui se trouve à l'instant t dans le volume limité par les sections d'entrée et de sortie.

b - Dans le cas où la variation d'énergie cinétique macroscopique est négligée :

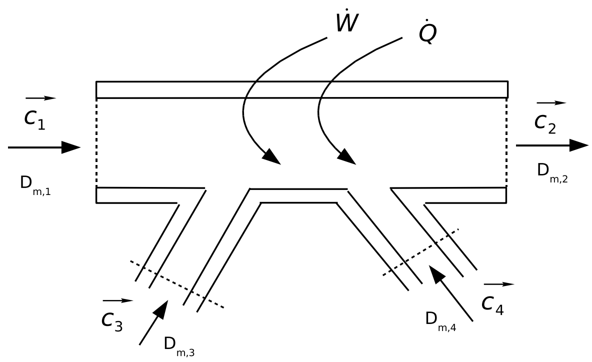
$$\left|\,{c_2}^2-{c_1}^2\,\right|\ <<\ |\,h_2-h_1\,|$$

montrez que la variation d'enthalpie massique s'exprime simplement en fonction de $w=\frac{\dot{W}}{D_m}$ et de $q=\frac{\dot{Q}}{D_m}$.

c - Précisez les unités de D_m, w et q.

Dans toute la suite de ce problème, on négligera les variations d'énergie cinétique macroscopique.

5 - Dans les machines, le volume de contrôle comporte parfois plus d'une entrée et d'une sortie, par exemple pour un séparateur ou un échangeur.



Montrez que dans le cas de deux entrées (1 et 3) et de deux sorties (2 et 4), on peut écrire en régime permanent, tous les débits de masse étant positifs :

a - $D_{m1}+D_{m3}=D_{m2}+D_{m4}$

b - $h_2D_{m2}+h_4D_{m4}-h_1D_{m1}-h_3D_{m3}=\dot{W}+\dot{Q}$

B. DEUXIEME PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

1 - Pour un système fermé de température supposée uniforme sur les frontières :

  a - Enoncez le deuxième principe sous la forme la plus générale.

  b - Expliquez pourquoi ce principe est appelé parfois "principe d'évolution" par opposition au premier principe.

2 - Pour un système fermé évoluant entre deux états pour lesquels la température est uniforme :

  a - Précisez comment on peut calculer la variation d'entropie.

  b - Indiquez l'unité de l'entropie.

3 - Donnez la signification de l'expression "thermostat à la température T_0".

4 - L'application du deuxième principe aux machines dithermes est une partie importante de la thermodynamique.

  a - En considérant une machine ditherme effectuant des cycles en échange thermique avec le thermostat à la température T_0 et avec le thermostat à la température $T_1 > T_0$, l'inégalité de Clausius s'écrit :

$$\frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_1}{T_1} \leq 0$$

    i. Précisez ce que représentent Q_0 et Q_1.

    ii. Démontrez l'inégalité de Clausius.

  b - Pour un moteur ditherme fonctionnant entre les deux thermostats précédents :

    i. Définissez le rendement.

    ii. Donnez une borne supérieure du rendement en fonction de T_0 et de T_1.

  c - Un moteur ditherme fonctionne entre les deux thermostats précédents en suivant un cycle de Carnot.

    i. Précisez la nature des évolutions formant le cycle.

    ii. Calculez le rendement.

C. LE GAZ PARFAIT

On considère un gaz parfait ayant pour masse molaire M et pour capacité thermique massique à volume constant c_V (à pression constante c_P); c_P et c_V sont supposées constantes. On note $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ et $r = \frac{R}{M}$, avec $R = 8,314$ J . K^{-1} . mol^{-1}.

On notera avec des lettres minuscules les grandeurs massiques : ainsi, h est l'enthalpie massique et v est le volume massique.

1 - a - Ecrivez la relation liant P, s et T.

b - Quelle relation lie la masse volumique μ à P et T ?

2 - a - Décrivez l'expérience de Joule-Thomson.

b - Exprimez en fonction de dT la différentielle dh de l'enthalpie massique du gaz parfait.

3 - En vous appuyant sur la relation de Mayer pour les gaz parfaits, établissez la relation entre r, c_P et γ.

4 - Déterminez la variation élémentaire ds de l'entropie massique en fonction des variations élémentaires de la température et de la pression et vérifiez l'homogénéité de la relation obtenue.

5 - a - Calculez la variation d'entropie $s_2 - s_1$ de l'unité de masse du gaz passant de l'état 1 caractérisé par T_1 et P_1 à l'état 2 caractérisé par T_2 et P_2.

b - Pour l'air, $M = 0,0290$ kg . mol^{-1}, $c_P = 1000$ J . K^{-1} . kg^{-1}.

Calculez $s_2 - s_1$ pour $T_1 = 290$ K, $P_1 = 4,00$ bar, $T_2 = 350$ K et $P_2 = 16,0$ bar.

c - Dans le diagramme entropique, T est en ordonnée et s est en abscisse.

i. Pour l'isobare P_1, déterminez la relation entre $s(T, P_1)$ et $s_1 = (T_1, P_1)$.

ii. Représentez l'allure de cette isobare.

d - On considère l'isobare $P_2 = 2P_1$.

i. Comparez $s(T, P_2)$ et $s(T, P_1)$.

ii. Comment obtient-on l'isobare $P_2 = 2P_1$ à partir de l'isobare P_1 dans le diagramme entropique ?

iii. Déduisez l'allure du réseau des isobares du gaz parfait dans le diagramme entropique.

D. CHANGEMENTS D'ETAT DU CORPS PUR

On suppose que le corps pur étudié peut exister simplement sous trois états physiques (gaz, liquide ou solide).

1 - Représentez dans le diagramme $P - T$ (T en abscisse) l'allure la plus fréquente des courbes d'équilibre entre deux états physiques. Précisez les points remarquables et les différents domaines délimités.

2 - On se propose d'étudier l'équilibre entre le liquide et le gaz, le gaz étant souvent désigné par le terme vapeur.

a - Représentez dans le plan $P - v$ le domaine où l'on trouve un système diphasé liquide-gaz à l'équilibre, le volume massique v étant en abscisse.

b - Définissez les termes :

i. Pression de vapeur saturante à la température T.

ii. Enthalpie massique (ou chaleur latente) de vaporisation à la température T, notée $L(T)$.

c - Tracez trois isothermes correspondant aux températures T_1, T_2 et T_3 telles que :

$$T_3 > T_{critique} > T_2 > T_1 > T_{triple}$$

d - A quelles conditions sur P et sur v le gaz peut-il être considéré comme parfait ?

3 - Dans le domaine biphasé, un système à l'équilibre formé d'une masse m de fluide est caractérisé à la température T par sa composition. On note x le titre massique en vapeur et $1 - x$ le titre massique en liquide ; la masse de vapeur est alors $x.m$

a - Exprimez l'enthalpie H du système en fonction de m, x et des enthalpies massiques du gaz et du liquide, $h_g(T)$ et $h_l(T)$, dans les conditions d'équilibre liquide-vapeur.

b - Déduisez la relation donnant x en fonction de h_g, h_l et h, $h = \frac{H}{m}$ étant l'enthalpie massique du mélange.

c - Montrez que l'on obtient une relation analogue donnant x en fonction de s, s_g et s_l, entropies massiques à la température T respectivement du système biphasé, du gaz et du liquide dans les conditions d'équilibre liquide-vapeur.

d - Déduisez de la condition d'équilibre entre le gaz et le liquide la relation

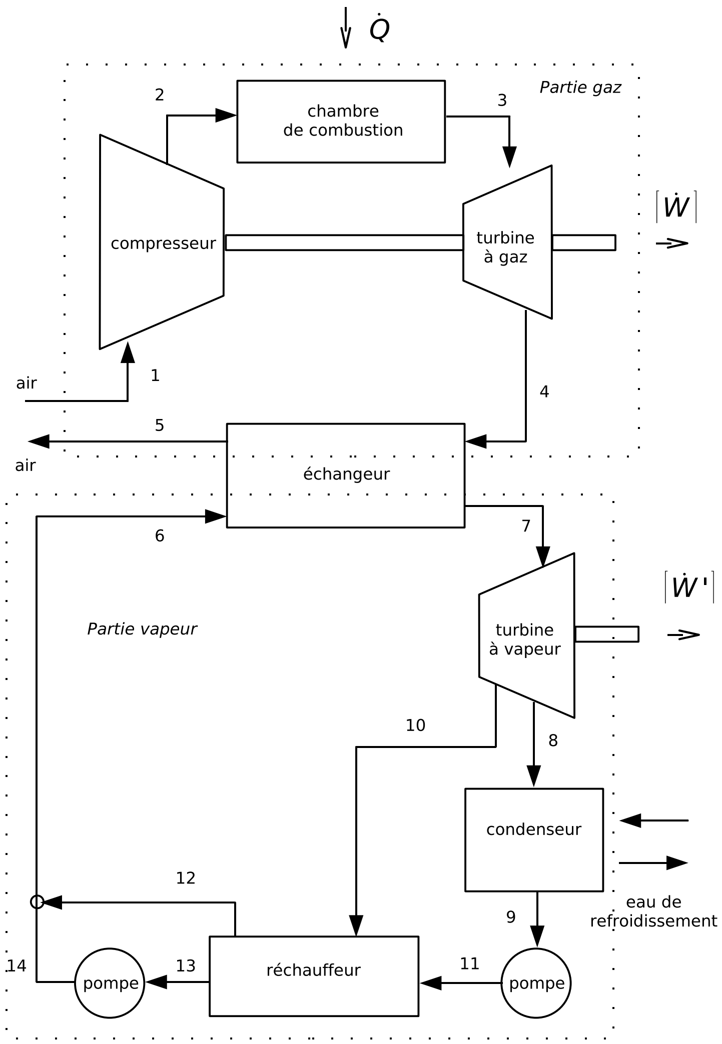
$$s_g(T) - s_l(T) = \frac{L(T)}{T}$$

e - A l'aide du diagramme entropique de l'eau, déterminez L à 273 K, 373 K et 473 K. Commentez ces valeurs.

Remarques

Pour la résolution de la partie E, il est conseillé de porter dans un tableau, au fur et à mesure de leur obtention, les valeurs de T et P pour les états notés de 1 à 14. Ce tableau, qu'il n'est pas nécessaire de rendre, facilitera la résolution des différentes questions.

Attention aux unités de pression : $1,0$ MPa $= 10$ bar.



E. ETUDE D'UNE CENTRALE A CYCLE COMBINE

Dans toute l'étude, on néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur. Les évolutions dans les conduites de liaison sont supposées isobares, isothermes et adiabatiques. L'installation est en régime permanent.

La centrale reçoit de l'extérieur de l'énergie thermique et fournit à l'extérieur du travail qui est disponible sur l'arbre de deux turbines. Le travail est utilisé par des alternateurs, non étudiés ici, pour produire de l'électricité.

I. Etude de la partie gaz

Le fluide est assimilé à de l'air considéré comme un gaz parfait pour lequel $\gamma = 1,40$ et $c_P = 1000$ J . K^{-1} . kg^{-1}.

L'air aspiré dans l'atmosphère au point 1 ($P_1 = 1,00$ bar , $T_1 = 290$ K) est rejeté dans l'atmosphère ($P_5 = P_4 = 1,00$ bar).

L'air est comprimé dans un compresseur, réchauffé dans la chambre de combustion et détendu dans la turbine à gaz : $P_2 = P_3 = 8,80$ bar.

La compression est adiabatique.

1 - En considérant la compression comme isentropique :

  a - Déterminez T_2 en fonction de P_1, T_1, P_2 et γ.

  b - Calculez numériquement T_2.

  c - Déterminez le travail reçu du compresseur par un kilogramme d'air traversant le compresseur de façon adiabatique (utilisez le résultat de la question A.4.b).

2 - Dans la chambre de combustion, l'air est mélangé à du gaz naturel et une combustion a lieu. On modélisera cette évolution par un échauffement isobare de l'air seul, non mélangé à du gaz naturel, l'apport thermique élevant la température de T_2 à $T_3 = 1220$ K.

  a - Calculez numériquement le débit de masse d'air D_m supposé identique à l'entrée et à la sortie de la chambre de combustion pour une valeur $\dot{Q} = 800$ MW de la puissance thermique.

  b - Calculez numériquement la variation d'entropie massique $(s_3 - s_2)$ et commentez son signe.

3 - Dans la turbine, l'air subit une détente adiabatique. La puissance fournie au milieu extérieur sur l'arbre commun à la turbine à gaz et au compresseur est $|\dot{W}|$ avec $\dot{W} = -240$ MW. Calculez numériquement T_4.

4 - a - L'évolution dans la turbine peut-elle être considérée comme isentropique ? (on pourra calculer numériquement $s_4 - s_3$).

  b - L'évolution est-elle réversible ?

5 - Calculez numériquement le rendement de la partie turbine à gaz.

6 - Dans un diagramme entropique, représentez sommairement les évolutions de l'air entre 1 et 4.

II. Etude de l'échangeur

L'échangeur est supposé parfaitement calorifugé vis-à-vis de l'extérieur. L'air sortant est à la température $T_5 = 490$ K. L'eau liquide arrive dans l'échangeur à $T_6 = 393$ K avec un débit masse D_m'.

1 - Ecrivez la relation liant D_m', h_7, h_6, D_m, h_4 et h_5.

2 - a - Déterminez littéralement la puissance thermique reçue par l'eau dans l'échangeur.

  b - Calculez numériquement cette puissance.

3 - L'échangeur est la source chaude pour la partie vapeur. La puissance disponible sur l'arbre de la turbine à vapeur est $|\dot{W}'|$ avec $\dot{W}' = -100$ MW. Les pompes ont une puissance négligée ici. Calculez numériquement le rendement de la partie turbine à vapeur.

4 - Déterminez numériquement la puissance thermique échangée avec l'eau de refroidissement du condenseur.

5 - Calculez numériquement le rendement global de la centrale à cycle combiné et commentez le résultat obtenu.

III. Etude de la partie machine à vapeur

L'eau rentre dans l'échangeur en étant liquide à $T_6 = 383$ K et $P_6 = 20,0$ bar. Le débit masse d'eau liquide est $D_m{}' = 110$ kg . s^{-1}. L'eau ressort de l'échangeur à $T_7 = 723$ K après une évolution qui est isobare tout au long du trajet du point 6 au point 7.

1 - Au point 6 le liquide a pratiquement la même entropie massique que le liquide saturé à la même température. Déterminez à l'aide du diagramme entropique de l'eau :

  a - Les valeurs h_6 et s_6, puis h_7 et s_7.

  b - La nature du fluide sortant de l'échangeur.

2 - Vérifiez que la valeur proposée pour $D_m{}'$ est compatible avec l'utilisation de la relation obtenue à la question E.II.1, compte tenu de la précision des données numériques. Dans toute la suite, on conservera la valeur $D_m{}' = 110$ kg . s^{-1}.

3 - La turbine à vapeur comporte plusieurs étages et on prélève du fluide au point 10 après une détente partielle. Le fluide prélevé est de la vapeur saturée à $P_{10} = 2,00$ bar et la fraction du débit masse total qui est prélevée est notée y. Le reste du fluide est détendu jusqu'à la pression $P_8 = P_9 = 0,060$ bar du condenseur, dans lequel le liquide est supposé en équilibre avec sa vapeur. Les pompes ne modifient pratiquement pas la température de l'eau liquide qui change de pression entre l'entrée et la sortie de la pompe. On aura donc $T_{11} = T_9$ et $T_{12} = T_{13} = T_{14} = T_6 = 383$ K. On donne $P_{11} = P_{12} = P_{14} = P_6 = 20,2$ bar.

Déterminez la température T_9 de l'eau liquide saturée qui est aspirée par la pompe à la sortie du condenseur, le condenseur étant isobare.

4 - Dans les conditions 11 et 12, l'eau est à l'état liquide et donc $dh = c_{eau}dT$ et $ds = c_{eau}\frac{dT}{T}$ avec $c_{eau} = 4180$ J . kg^{-1} . K^{-1} pour l'eau liquide.

  a - Déterminez la température T_{10} de la vapeur saturée pénétrant dans le réchauffeur.

  b - Le réchauffeur est supposé calorifugé et isobare : $P_{13} = P_{10}$. Prouvez que l'eau est liquide dans les conditions 13.

  c - Déterminez littéralement y.

  d - Calculez la valeur numérique de y avec deux chiffres significatifs.

5 - L'évolution dans la turbine est adiabatique ; en utilisant une des relations établies à la question A.5, écrivez la relation littérale permettant de calculez h_8.

6 - Calculez numériquement h_8.

7 - Calculez le titre massique x en vapeur du fluide qui sort de la turbine au point 8.

8 - a - Déterminez la création d'entropie dans la turbine par unité de temps.

b - Commentez le résultat obtenu.