ministère Éducation nationale

EFI MSP 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2010

CAPLP
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES – SCIENCES PHYSIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumériaue ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

DURÉE : 4 heures

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants.

Le premier exercice, de nature pédagogique, porte sur les fluctuations d'une fréquence selon les échantillons.
Le deuxième exercice est constitué de questions indépendantes.
Le troisième exercice a pour objet la recherche de l'image de deux cercles par une application définie dans le plan complexe.
Le quatrième exercice expose deux méthodes permettant d'obtenir une valeur approchée du nombre ln 2.

PREMIER EXERCICE

Cet exercice, de nature pédagogique, porte sur les fluctuations d'une fréquence selon des échantillons.
En **annexe 1** figure une situation d'étude qui permet de construire une activité de formation pour des élèves de seconde professionnelle.
En **annexe 2** se trouvent des extraits des programmes de mathématiques de seconde et de première professionnelles.

1. En utilisant la situation d'étude figurant en **annexe 1**, rédiger l'énoncé d'une évaluation destinée à des élèves de seconde professionnelle qui ont suivi une formation sur les fluctuations d'une fréquence selon les échantillons. Cette évaluation devra respecter les contraintes suivantes :
    - se dérouler en salle informatique,
    - avoir une durée comprise entre 30 et 40 minutes.
2. Indiquer les connaissances et capacités du programme que l'énoncé rédigé à la question précédente permet d'évaluer.

DEUXIÈME EXERCICE

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi[$ l'équation

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

2.
    a. Préciser si l'affirmation suivante est vraie ou si elle est fausse. Justifier ensuite la réponse donnée.

    « Si n et p sont deux nombres entiers tels que le nombre np est impair, alors le nombre $n^2 + p^2 - np$ est impair. »

    b. Préciser si l'affirmation suivante est vraie ou si elle est fausse. Justifier ensuite la réponse donnée.

    « Si n et p sont deux nombres entiers tels que le nombre np est pair, alors le nombre $n^2 + p^2 - np$ est pair. »

3. On dispose dans un sac de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. L'un de ces deux dés est bien équilibré et l'autre est un dé pipé pour lequel, lors d'un lancer, la probabilité d'obtenir un 6 sur la face supérieure est égale à la probabilité de ne pas obtenir un 6.
On prend un dé au hasard dans le sac, on le lance et on note le numéro obtenu sur la face supérieure. Quelle est, dans ces conditions, la probabilité de l'événement « obtenir un 6 » ?

Tournez la page S.V.P.

4. Étudier la continuité et la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

5. On considère un récipient cylindrique de rayon intérieur 10 cm et de hauteur intérieure 22 cm. On place une boule de rayon 5 cm au fond du récipient puis on verse de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la boule (cette boule, étant de densité plus grande que celle de l'eau, ne flotte pas).
   On enlève cette boule et on la remplace par une seconde boule de même densité et de rayon différent. L'eau recouvre à nouveau exactement la seconde boule.
   Déterminer, en exposant la démarche suivie, une valeur approchée, à un millimètre près, du rayon R de la seconde boule.

TROISIÈME EXERCICE

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.
On considère l'application f du plan P privé du point O dans le plan P qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M' $= f(\text{M})$ d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -1$.
Pour tout nombre réel r strictement positif, on note C_r le cercle de centre O et de rayon r.

I. Détermination d'images et d'antécédents

Soient E, F et G les points d'affixes respectives $z_E = \mathrm{i}$, $z_F = -1+\mathrm{i}$, $z_G = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$.

1. Déterminer les images E' et F' des points E et F par l'application f.
   Placer les points A, B, E, F, E' et F' dans le plan P.
2. a. Déterminer le module et un argument de z_G. Interpréter géométriquement ces deux résultats.
   b. Déterminer l'image G' du point G par l'application f et compléter la figure de la première question en construisant les points G et G' (on laissera apparents les traits de construction).
3. Déterminer les points invariants par l'application f.
4. a. Déterminer les antécédents par l'application f du point H d'affixe $z_H = \frac{1}{2}$.
   b. Soient M_1 et M_2 deux points distincts du plan P privé du point O. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur leurs affixes respectives z_1 et z_2 pour que les points M_1 et M_2 aient la même image par l'application f.

II. Image par l'application f du cercle C_1 de centre O et de rayon 1

1. Montrer que si le point M appartient au cercle C_1, l'affixe du point M' = f (M) est un nombre réel à préciser.
2. En déduire l'image du cercle C_1 par l'application f.

III. Image par l'application f du cercle C_2 de centre O et de rayon 2

1. Montrer que si le point M d'affixe z appartient au cercle C_2, l'affixe du point M' = f (M) est le nombre complexe $z' = \dfrac{5}{4}\cos\theta + \mathrm{i}\dfrac{3}{4}\sin\theta$, où θ désigne un argument du nombre complexe z.
2. Soit M un point du cercle C_2, z l'affixe de M et θ un argument de z.
   a. On rappelle que pour tout nombre réel r strictement positif, on note C_r le cercle de centre O et de rayon r. Déterminer en fonction de θ les coordonnées des points d'intersection N et N' de la demi-droite [OM) respectivement avec les cercles $C_{\frac{5}{4}}$ et $C_{\frac{3}{4}}$.
   b. En déduire un procédé permettant de construire l'image par l'application f d'un point quelconque du cercle C_2. Utiliser ce procédé pour représenter dans le plan P les images par l'application f des points A_1 et A_2 d'affixes respectives $z_{A_1} = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_{A_2} = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

3. On note (a,b) les coordonnées d'un point M et (a',b') les coordonnées du point M' = f(M).
   a. Montrer que si le point M appartient au cercle C_2, son image M' par l'application f appartient à la courbe E_2 d'équation $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = 1$.
   b. Préciser la nature de la courbe E_2 et tracer E_2 dans le plan P.
   c. Justifier que la courbe E_2 est l'image par l'application f du cercle C_2.

4. Déterminer un nombre réel r différent de 2 tel que les cercles C_2 et C_r aient la même image par l'application f.

Tournez la page S.V.P.

QUATRIÈME EXERCICE

L'objectif de cet exercice est d'étudier deux méthodes permettant d'obtenir un encadrement du nombre réel ln 2. Les parties **I** *et* **II** *sont indépendantes.*

Partie I. Une approximation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 5 cm.

On considère la fonction φ définie sur l'intervalle [1 ; 2] par $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. On note Γ la courbe représentative de la fonction φ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on note K l'intégrale $K = \int_1^2 \frac{dt}{t}$.

On note :

- A, B et C les points de la courbe Γ d'abscisses respectives 1, $\frac{3}{2}$ et 2 ;
- I le point de coordonnées (1 ; 0), U le point de coordonnées $(\frac{3}{2}$; 0) et V le point de coordonnées (2 ; 0).

1. a. Tracer la courbe Γ sur l'intervalle [1 ; 2] et interpréter graphiquement le nombre réel K à l'aide de la courbe Γ.
   b. Calculer le nombre réel K.
2. Déterminer la mesure exacte de l'aire du polygone IVCBA, en unité d'aire. On admet que ce nombre est un majorant du nombre réel K.
3. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe Γ au point B.
   b. Étudier la position de la courbe Γ par rapport à la droite T sur l'intervalle [1 ; 2] puis tracer la tangente T.
   c. En déduire graphiquement un minorant du nombre réel K.
4. Donner un encadrement de K, d'amplitude inférieure ou égale à 0,05.

Partie II. Une méthode utilisée au XVII^{e} siècle

II.1. Un programme de calcul

1. Donner une valeur arrondie à 10^{-5} près du nombre affiché par la calculatrice à l'issue du programme de calcul suivant :
   - Entrer le nombre 2 sur la calculatrice.
   - Répéter 9 fois de suite l'instruction suivante : calculer la racine carrée du dernier nombre affiché par la calculatrice.
   - Soustraire 1.
   - Répéter 9 fois de suite l'instruction suivante : multiplier par 2 le dernier nombre affiché par la calculatrice.
2. Comparer le nombre qui vient d'être obtenu à une valeur numérique approchée du nombre ln 2 donnée par la calculatrice.

Cette méthode de calcul fut utilisée par Henri Briggs au début du XVII^e^ siècle pour obtenir des valeurs approchées de logarithmes. La suite de l'exercice présente une étude de cette méthode. Henri Briggs inventa ensuite de nombreuses autres méthodes ingénieuses pour établir des tables de logarithmes qu'il publiera en 1624 dans un traité intitulé Arithmetica Logarithmica.

II.2. Un résultat théorique

On note **N** l'ensemble des nombres entiers naturels.

1. Soit $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ une suite réelle. Donner une définition de
« la suite $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ converge vers L » où L est un nombre réel.

2. Démontrer le théorème suivant :
« Soient trois suites réelles $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in \mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in \mathbf{N}}$ telles que pour tout nombre entier naturel n,
$$a_n \leq b_n \leq c_n .$$
Si les suites $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in \mathbf{N}}$ convergent vers une même limite L, alors la suite $(b_n)_{n\in \mathbf{N}}$ converge vers L. »

II.3. Étude de deux suites

Soit un nombre réel α strictement supérieur à 1. On considère les suites $(u_n)_{n\in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in \mathbf{N}}$ définies par :

$$u_0 = \alpha \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}\ ;$$

$$v_n = 2^n\ (u_n - 1) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbf{N}.$$

1. Le calcul effectué dans la question **II.1.**1. correspond au calcul d'un terme de l'une de ces deux suites avec pour valeur de α le nombre 2. Quel est ce terme ?

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout n de **N**, $u_n > 1$.
b. Démontrer que pour tout n de **N**,
$$u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1).$$
c. En déduire que pour tout n de **N**,
$$0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}(\alpha - 1).$$
d. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in \mathbf{N}}$ converge et préciser sa limite.

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel $x \geq 0$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire que pour tout n de **N**, on a $-\dfrac{(u_n-1)^2}{2} \leq \ln(u_n) - u_n + 1 \leq 0$.

c. Montrer que pour tout n de **N**, on a $u_n = \alpha^{\frac{1}{2^n}}$, puis que $-\dfrac{1}{2^{n+1}}(\alpha-1)^2 \leq \ln\alpha - v_n \leq 0$.

d. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in \mathbf{N}}$.

4. Quelle valeur du nombre entier naturel n suffit-il alors de choisir pour obtenir une valeur approchée du nombre ln 2 à 10^{-3} près ? À 10^{-6} près ?

Tournez la page S.V.P.

ANNEXE 1

SITUATION D'ÉTUDE : TAUX ANORMAL DE CAS DE LEUCÉMIE INFANTILE

(d'après un document de travail publié sur Eduscol.)
Niveau : seconde professionnelle.
Module : fluctuations d'une fréquence selon les échantillons, probabilités.
Thématique : protéger la planète (développement durable) - prévenir un risque lié à l'environnement (prévention, santé et sécurité).

Énoncé

Une petite ville des États-Unis a connu 9 cas de leucémie chez de jeunes garçons en l'espace de 10 années. Doit-on, comme l'ont alors affirmé les autorités, en accuser le hasard ?

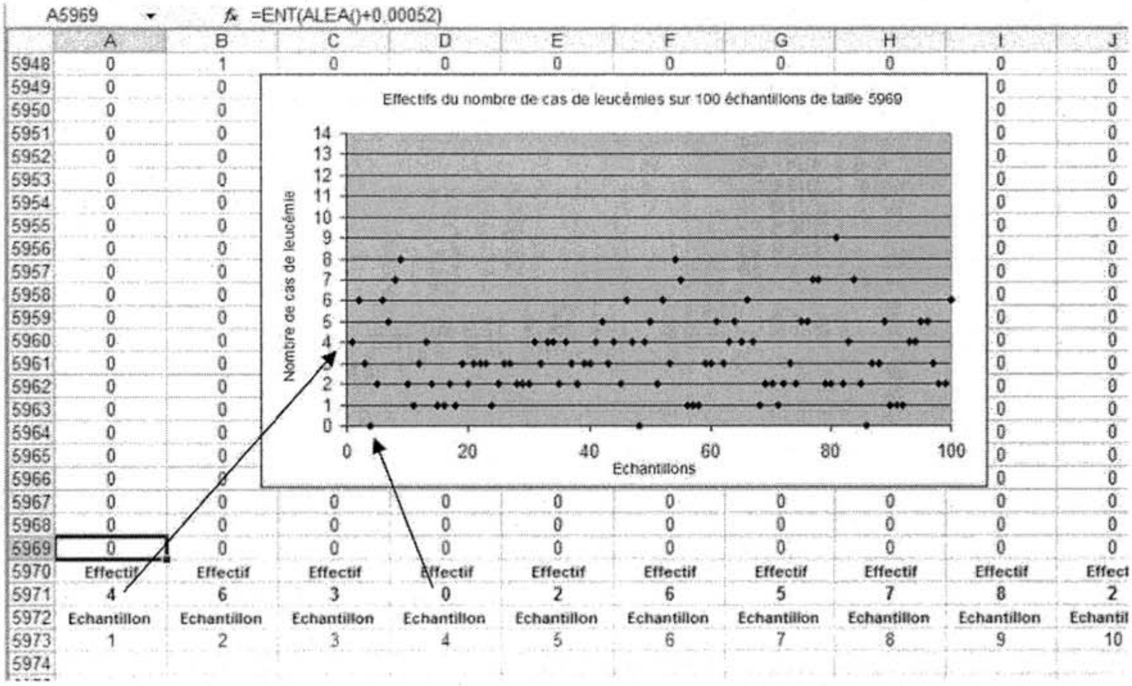
Cet exemple montre les enjeux de la méthode statistique.
Woburn est une petite ville industrielle du Massachusetts, au Nord-Est des États-Unis. Du milieu à la fin des années 1970, la communauté locale s'émeut d'un grand nombre de cas de leucémie infantile survenant en particulier chez les garçons dans certains quartiers de la ville. Les familles se lancent alors dans l'exploration des causes et constatent la présence de décharges et de friches industrielles ainsi que l'existence de polluants. Dans un premier temps, les experts gouvernementaux concluent qu'il n'y a rien d'étrange, mais les familles s'obstinent et saisissent leurs propres experts. Une étude statistique montre qu'il se passe sans doute quelque chose « d'étrange ».
Le tableau suivant résume les données statistiques concernant les garçons de moins de 15 ans, pour la période 1969-1979 (Source : *Massachusetts Department of Public Health*).

Population des garçons de moins de 15 ans à Woburn selon le recensement de 1970 : n	Nombre de cas de leucémie infantile observés chez les garçons à Woburn entre 1969 et 1979	Fréquence des cas de leucémie infantile aux Etats-Unis (garçons) : p
5 969	9	0,000 52

La question statistique qui se pose est de savoir si le hasard seul peut raisonnablement expliquer le nombre de cas de leucémie infantile observés chez les garçons de Woburn, considérés comme résultant d'un échantillon prélevé dans la population américaine.
La population des États-Unis étant très grande par rapport à celle de Woburn, on peut considérer que l'échantillon résulte d'un tirage avec remise et simuler des tirages de taille n avec un tableur.

Il est aisé de simuler sur un tableur 100 échantillons de taille n = 5 969 prélevés au hasard dans une population de garçons où la probabilité de leucémie est p = 0,000 52 (cas « normal ») en utilisant l'instruction : =ENT(ALEA()+0,000 52) .
L'instruction =ALEA() génère un nombre aléatoire dans l'intervalle [0, 1[.
L'instruction =ALEA()+0,000 52 génère donc un nombre aléatoire dans l'intervalle [0,000 52 ; 1,000 52[.
Ainsi, =ENT(ALEA()+0,000 52), où ENT désigne la partie entière, vaut la plupart du temps 0 (non malade) et vaut 1 (malade) avec la probabilité 0,000 52.
Sur chaque échantillon, en faisant la somme, on obtient le nombre de cas observés, sous l'hypothèse d'une probabilité « normale ».

Il est possible de représenter sur un graphique les 100 résultats observés sur les échantillons ainsi simulés.



Les simulations montrent que le nombre de cas de leucémie infantile observés à Woburn (9 cas) est extrêmement rare (de l'ordre de 1 % des simulations sur un grand nombre d'essais), sous l'hypothèse d'une probabilité « normale ».
Il est donc raisonnable de penser que le niveau très « significativement » élevé des cas de leucémie infantile observés chez les garçons de Woburn n'est pas dû au hasard.
Ce taux anormalement élevé de cas de leucémie infantile est officiellement confirmé par le Département de Santé Publique du Massachusetts en avril 1980. Les soupçons se portent alors sur la qualité de l'eau de la nappe phréatique qui, par des forages, alimente la ville. On découvre ainsi le syndrome du trichloréthylène.

ANNEXE 2

EXTRAITS DES PROGRAMMES DE BACCALAUREAT PROFESSIONNEL
Seconde professionnelle

1.2 Fluctuations d'une fréquence selon les échantillons, probabilités

La notion de fluctuation d'échantillonnage, essentielle en statistique, est abordée dans cette partie du programme en étudiant la variabilité d'observation d'une fréquence. Elle favorise une expérimentation de l'aléatoire. L'objectif de ce module est de faire comprendre que le hasard suit des lois et de préciser l'approche par les fréquences de la notion de probabilité initiée en classe de troisième. Après une expérimentation physique pour une taille fixée des échantillons, la simulation à l'aide du générateur de nombres aléatoires d'une calculatrice ou du tableur permet d'augmenter la taille des échantillons et d'observer des résultats associés à la réalisation d'un très grand nombre d'expériences.

Capacités	Connaissances	Commentaires
Expérimenter, d'abord à l'aide de pièces, de dés ou d'urnes, puis à l'aide d'une simulation informatique prête à l'emploi, la prise d'échantillons aléatoires de taille n fixée, extraits d'une population où la fréquence p relative à un caractère est connue.	Tirage au hasard et avec remise de n éléments dans une population où la fréquence p relative à un caractère est connue.	Toutes les informations concernant l'outil de simulation sont fournies.
Déterminer l'étendue des fréquences de la série d'échantillons de taille n obtenus par expérience ou simulation.	Fluctuation d'une fréquence relative à un caractère, sur des échantillons de taille n fixée.	

Tournez la page S.V.P.

Évaluer la probabilité d'un événement à partir des fréquences.	Stabilisation relative des fréquences vers la probabilité de l'événement quand n augmente.	La propriété de stabilisation relative des fréquences vers la probabilité est mise en évidence graphiquement à l'aide d'un outil de simulation.
Evaluer la probabilité d'un événement dans le cas d'une situation aléatoire simple. Faire preuve d'esprit critique face à une situation aléatoire simple.		

Première professionnelle

1.2 Fluctuations d'une fréquence selon les échantillons, probabilités *(groupements* A, B *et* C*)*

L'objectif de ce module est de consolider et d'approfondir l'étude, initiée en seconde professionnelle, de la variabilité lors d'une prise d'échantillon, pour favoriser la prise de décision dans un contexte aléatoire. La consolidation des notions déjà acquises en seconde professionnelle se traite en prenant appui sur des exemples de situations concrètes, issues de la vie courante, du domaine professionnel ou de la liste des thématiques. L'utilisation des TIC est nécessaire.

Capacités	Connaissances	Commentaires
Expérimenter, à l'aide d'une simulation informatique, la prise d'échantillons aléatoires de taille n fixée, extraits d'une population où la fréquence p relative à un caractère est connue.	Distribution d'échantillonnage d'une fréquence.	
Calculer la moyenne de la série des fréquences f_i des échantillons aléatoires de même taille n prélevés. Comparer la fréquence p de la population et la moyenne de la série des fréquences f_i des échantillons aléatoires de même taille n prélevés, lorsque p est connu.	Moyenne de la distribution d'échantillonnage d'une fréquence.	La population est suffisamment importante pour pouvoir assimiler les prélèvements à des tirages avec remise. La stabilisation vers p, lorsque la taille n des échantillons augmente, de la moyenne des fréquences est mise en évidence graphiquement à l'aide d'un outil de simulation. Distinguer, par leurs notations, la fréquence p de la population et les fréquences f_i des échantillons aléatoires.
Calculer le pourcentage des échantillons de taille n simulés, pour lesquels la fréquence relative au caractère étudié appartient à l'intervalle donné $[\, p-\frac{1}{\sqrt{n}}\, ;\, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\,]$ et comparer à une probabilité de 0,95. Exercer un regard critique sur des données statistiques en s'appuyant sur la probabilité précédente.	Intervalle de fluctuation.	Se restreindre au cas où $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$: la connaissance de ces conditions n'est pas exigible. La formule de l'intervalle est donnée. La connaissance de la « variabilité naturelle » des fréquences d'échantillon (la probabilité qu'un échantillon aléatoire de taille n fournisse une fréquence dans l'intervalle $[\, p-\frac{1}{\sqrt{n}}\, ;\, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\,]$ est supérieure à 0,95) permet de juger de la pertinence de certaines observations.

IMPRIMERIE NATIONALE – 10 0074 – D'après documents fournis