# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1

Voici une situation pouvant être utilisée en classe de baccalauréat professionnel industriel, pour une évaluation.

*Le tableau ci-dessous présente, en $\mu g/m^3$, les moyennes annuelles en dioxyde de soufre présent dans l'air, relevées dans une ville durant six années consécutives.*

| *rang de l'année $x_i$* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *moyenne annuelle $y_i$* | *6,6* | *7,3* | *5* | *4,4* | *2,2* | *2,7* |

En annexe page 7/7 se trouvent les programmes de statistique des classes de baccalauréat professionnel industriel.

***Partie I***

En utilisant la situation décrite ci-dessus, proposer l'énoncé d'un exercice pouvant figurer dans un sujet de baccalauréat professionnel industriel dans lequel les candidats doivent :

- tracer une droite d'ajustement d'un nuage de points ;
- utiliser cette droite pour effectuer une prévision.

***Partie II***

Proposer une séquence de formation, en classe de baccalauréat professionnel industriel, concernant les statistiques à deux variables et portant sur la partie « exemples d'étude d'ajustement affine » figurant en annexe dans le champ des activités.

- Indiquer les prérequis nécessaires et l'endroit de la séquence où ces prérequis interviennent.
- Faire apparaître l'organisation prévue en indiquant ce que fait le professeur, ce que font les élèves et leurs modes de travail. Justifier la pertinence des modes de travail envisagés.
- Indiquer les outils utilisés par les élèves et la plus value pédagogique apportée par l'utilisation de ces outils.

***Partie III***

1. La méthode dite « des moindres carrés » permet de calculer le coefficient directeur $a$ et l'ordonnée à l'origine $b$ d'une droite d'ajustement ($D$) d'un nuage de points.

Pour la situation décrite en début d'exercice, on note $M_i$ le point de coordonnées $(x_i, y_i)$ et $P_i$ le point de $(D)$ d'abscisse $x_i$. Les nombres $a$ et $b$ cherchés sont les réels qui rendent minimale la somme $S(a,b)$ des carrés des distances $M_iP_i$.

a) Donner l'expression de $S(a,b)$ en fonction de $a$, $b$, $x_i$ et $y_i$.

En tout point de $\mathbf{R}^2$, $S(a,b)$ admet une dérivée partielle d'ordre un par rapport à $a$ et une dérivée partielle d'ordre un par rapport à $b$.
On admet que le minimum de $S(a,b)$ est obtenu lorsque les deux dérivées partielles $\frac{\partial S}{\partial a}(a,b)$ et $\frac{\partial S}{\partial b}(a,b)$ sont nulles.

b) Montrer que $\sum_{i=1}^{6} y_i = 6\,b + a \sum_{i=1}^{6} x_i$.

c) Démontrer que le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$ du nuage de points appartient à la droite d'ajustement.

d) Montrer que $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = b \sum_{i=1}^{6} x_i + a \sum_{i=1}^{6} x_i^2$.

e) En déduire les nombres $a$ et $b$ pour lesquels $S(a,b)$ est minimale.

2. Comparer avec l'équation de la droite d'ajustement obtenue en utilisant une calculatrice en mode statistique. Conclure.

## Exercice 2

*Le but de cet exercice est l'étude de séries numériques.*

***Partie I : Étude de la convergence d'une série numérique.***

On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

1. a) Pour un nombre entier $m$ supérieur à 1, comparer $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}$ *et* $\int_1^m \frac{1}{x}\,dx$.

   b) Trouver un nombre entier $m$ tel que $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \geq 1\,000$.

2. La série numérique étudiée converge-t-elle ?

***Partie II : Étude de la convergence et calcul de la somme de deux séries numériques.***

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ pour $n$ nombre entier strictement supérieur à 1.

a) Trouver deux nombres réels $a$ et $b$ tels que, pour tout nombre entier $n$ strictement supérieur à 1, on ait : $$\frac{1}{n(n-1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n-1}.$$

b) Calculer alors la valeur de $\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k(k-1)}$.

c) En déduire que la série étudiée est convergente et calculer sa somme.

2. On considère la série de terme général $u_n=\frac{1}{n(n^2-1)}$ pour $n$ nombre entier strictement supérieur à 1.

   En reprenant la même démarche que celle utilisée à la question précédente, montrer la convergence de cette série et calculer sa somme.

## Exercice 3

On se place dans un plan affine euclidien orienté.

$ABC$ est un triangle équilatéral direct ($(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$) de centre de gravité $G$.

Le point $I$ est le milieu du segment [$AB$], le point $A$' est le symétrique du point $C$ par rapport au point $I$, et $s$ est la similitude directe de centre $C$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport $\sqrt{3}$.

1. Déterminer l'image du point $A$ et celle du point $G$ par $s$, puis construire, en justifiant la construction, le point $B$' image du point $B$ par $s$.
2. On note $J$ le milieu du segment [$A$'$B$']. Prouver que les points $C$, $B$ et $J$ sont alignés.
3. Prouver que le point $B$ est le milieu du segment [$AB$'].
4. On souhaite redémontrer les résultats précédents en utilisant les nombres complexes. On se place pour cela chez le repère orthonormé direct ($I$, $\overrightarrow{IB}$ , $\vec{v}$ ).

   a) Les points $A$, $B$, $C$ et $A$' ont respectivement pour affixe $z_A$ , $z_B$ , $z_C$ et $z_{A'}$. Donner $z_A$ et $z_B$ puis déterminer $z_C$ et $z_{A'}$.

   b) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe $s$ et en déduire l'affixe du point $B$', puis celle du point $J$.

   c) En déduire que le point $B$ est le milieu du segment [$AB$'] et que les points $C$, $B$ et $J$ sont alignés.

# Exercice 4

*Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du XIII$^e$ siècle, rapporte dans son ouvrage* Flos*, publié en* 1225*, un problème que lui a soumis Jean de Palerme. Il s'agit de résoudre l'équation du troisième degré :* $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.
*L'exercice ci-dessous explore diverses méthodes de résolution de cette équation.*

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$, définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$.
On note $f'$ et $f''$ respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction $f$, et $C_f$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note (E) l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

***Partie I : Détermination d'un encadrement de la solution réelle positive de (E)***.

1. a) Étudier les variations de la fonction $f$.
   b) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle positive unique que l'on notera $a$ .
   c) Encadrer le nombre réel $a$ par deux nombres entiers consécutifs. On peut donc affirmer que $a$ n'est pas un nombre entier.
2. Expliciter une méthode permettant d'obtenir un encadrement du nombre réel $a$, d'amplitude $10^{-2}$.

***Partie II. Détermination d'une valeur approchée de a, solution réelle positive de (E), par la méthode dite de Newton.***

Soit $x_0 = 2$ et $A_0$ le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. On note $(T_0)$ la tangente à la courbe $C_f$ en $A_0$. On désigne par $x_1$ l'abscisse de $M_1$, point d'intersection de $(T_0)$ avec l'axe des abscisses. On réitère la même opération en considérant $x_1$ au lieu de $x_0$ : on définit ainsi un réel $x_2$, puis de proche en proche une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Pour tout nombre entier $n > 0$, déterminer $x_n$ en fonction de $x_{n-1}$.
2. Donner, sans justification, une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $x_i$ , pour $i = 1, 2, 3, 4$ (on pourra s'aider d'une calculatrice).
3. Soit $h$, la fonction définie, pour $x$ appartenant à l'intervalle [1, 2], par $h(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

   On note $h'$ la fonction dérivée de la fonction $h$ sur le même intervalle.
   a) Calculer $h'(x)$.
   b) Montrer que, sur l'intervalle [1, 2], les fonctions $f$, $f'$, $f''$ sont strictement croissantes.

   En déduire que pour tout $x$ de l'intervalle [1, 2] : $|h'(x)| \leq \left(\dfrac{16}{17}\right)^2$.

c) En déduire que pour tout $x$ de l'intervalle [1, 2] :

$$0 \leq \left|h(x) - h(a)\right| \leq \left(\frac{16}{17}\right)^2 |x - a| \ .$$

4. Montrer que la suite $(x_n)$ converge vers $a$.

5. Trouver un nombre entier $n_0$ tel que pour tout nombre entier $n \geq n_0$ on ait $\left|x_n - a\right| \leq 10^{-3}$.

***Partie III. Détermination de la valeur exacte de a, solution réelle positive de (E), par la méthode de Cardan.***

1. On pose $x = \mathrm{X} + h$. Déterminer les nombres rationnels $h, p, q$ tels que l'équation (E) s'écrive sous la forme $\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q = 0$. On note (E') cette nouvelle équation.

2. a) On note A l'unique solution réelle de l'équation (E'). Montrer l'existence de deux nombres réels $u$ et $v$ tels que $\mathrm{A} = u + v$ et $3uv = -p$.

   b) On note $\mathrm{U} = u^3$ et $\mathrm{V} = v^3$. Montrer que, dans ces conditions, U et V sont les solutions de l'équation $\mathrm{Y}^2 + q\mathrm{Y} - \frac{p^3}{27} = 0$.

3. Établir la formule de Cardan :

$$\mathrm{A} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ .$$

4. En déduire $a$.

Annexe

## *Extraits de programmes des baccalauréats professionnels industriels*

### IV – ACTIVITÉS STATISTIQUES

La lecture, l'interprétation et la réalisation de tableaux et de graphiques ont fait l'objet d'activités en BEP. De nouvelles situations, issues en particulier du domaine technologique et de la vie économique et sociale, servent de support à la pratique de la démarche statistique en tirant parti des possibilités offertes par les outils tels que la calculatrice ou l'ordinateur.

**a) Série statistique à une variable**

Paramètres de position et de dispersion : médiane, étendue.
Modes d'une distribution.

Cette partie complète les notions déjà acquises en BEP où moyenne et écart-type ont été introduits.

**b) Séries statistiques à deux variables**

Tableaux d'effectifs, nuages de points associés, point moyen.

***Champ des activités***

Lecture et exploitation de données statistiques mises sous forme de tableaux ou de diagrammes d'effectifs ou de fréquences ; exemples de distribution unimodale ou bimodale, calcul et interprétation des paramètres, emploi de tels indicateurs pour comparer des séries statistiques, pertinence des indicateurs retenus par rapport à la situation étudiée.

Le module graphique lié à un tableur permet de faire des travaux efficaces dans ce domaine. Certaines situations peuvent conduire à la recherche d'autres caractéristiques de position ou de dispersion mais aucune connaissance n'est exigible à ce sujet en mathématiques.

Représentation graphique par un nuage de points, détermination de son point moyen.
Exemples simples d'étude d'ajustement affine.

Pour un ajustement affine, toutes les indications utiles sont fournies. La corrélation linéaire n'est pas au programme.