CONCOURS INTERNE

Section : Mathématiques – Sciences physiques

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures.

Le sujet est constitué de quatre exercices.

Le premier exercice, de nature pédagogique, a pour objet la correction d'un devoir d'une classe de baccalauréat professionnel industriel, l'analyse d'extraits de copies d'élèves et l'organisation d'une séquence.

Le deuxième exercice a pour but de déterminer, parmi cinq propositions, celles qui sont exactes et celles qui sont fausses, en argumentant les réponses.

Le troisième exercice porte sur les probabilités.

Le quatrième exercice a pour objet la méthode d'Euler.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction, interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies, ainsi que, dans les parties concernées, le savoir-faire pédagogique et l'intervention de méthodes en conformité avec les programmes en vigueur dans les lycées professionnels.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé (conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).

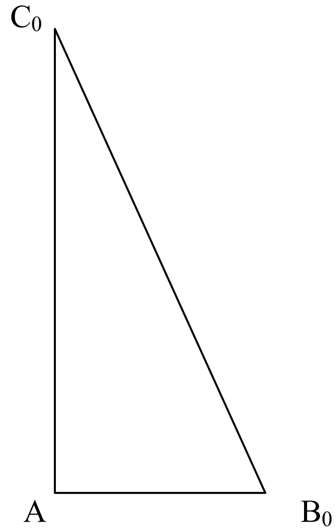
Ce sujet contient 11 pages avec les annexes

Exercice 1

Un enseignant a traité avec sa classe de première année de baccalauréat professionnel industriel la géométrie dans le plan et les suites numériques. Il propose à ses élèves un devoir dont l'énoncé figure dans l'encadré ci-dessous.

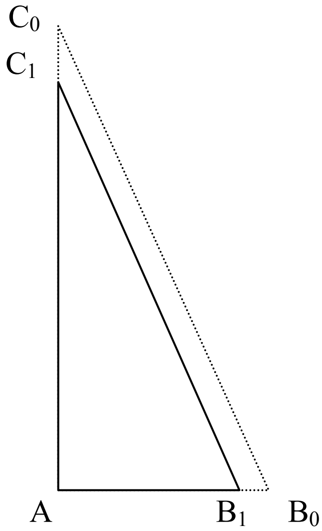
Un bateau possède une grand-voile qu'il est possible de réduire par enroulement autour de la bôme.

(fig 1)



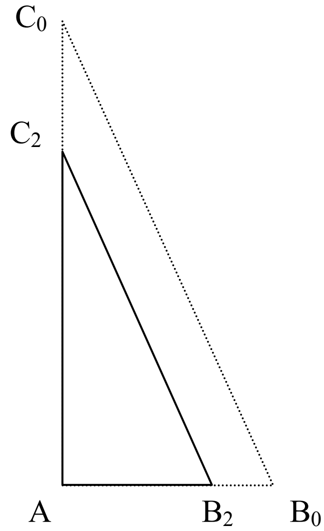
$AB_0 = 6$ m
$AC_0 = 10$ m

(fig 2)



$AC_1 = 9{,}2$ m

(fig 3)



$AC_2 = 8{,}4$ m

La voile totalement déroulée est représentée par le triangle AB_0C_0 rectangle en A (fig 1).
Après un tour de bôme, la voile est représentée par le triangle rectangle AB_1C_1 (fig 2).
Après deux tours de bôme, la voile est représentée par le triangle rectangle AB_2C_2 (fig 3).

1- Calculer, en m^2, l'aire $\mathscr{A}_0$ de la surface de la grand-voile déroulée.
2- Sachant que les droites (B_1C_1) et (B_0C_0) sont parallèles (fig 2) :
   a) calculer AB_1 ;
   b) en déduire l'aire $\mathscr{A}_1$ de la surface de la voile après un tour de bôme.
3- Sachant que les droites (B_2C_2) et (B_0C_0) sont parallèles (fig 3) :
   a) calculer AB_2 ;
   b) en déduire l'aire $\mathscr{A}_2$ de la surface de la voile après deux tours de bôme.
4- On suppose pour toute la suite du problème, qu'à partir de la position grand-voile déroulée (fig 1), on effectue un nombre entier de tours de bôme ; on note n ce nombre.
   a) montrer que $n < 13$;
   b) on suppose que l'aire $\mathscr{A}_n$, en m^2, de la surface de la voile, après n tours de bôme, est donnée par :
   $$\mathscr{A}_n = 0{,}192\, n^2 - 4{,}8\, n + 30.$$
   Vérifier cette relation pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
   c) Peut-on obtenir une aire de la surface de la voile exactement égale à 10 m^2 ?
   Justifier la réponse.
   Déterminer la valeur de n qui permet d'obtenir l'aire de la voile la plus proche de 10 m^2.

Trois objectifs sont visés par l'enseignant dans ce devoir :

- vérifier la maîtrise de certains savoir-faire ;
- vérifier la capacité de l'élève à analyser le problème posé et à proposer une solution cohérente ;
- étudier une situation concrète qui servira de support au cours suivant portant sur la résolution d'une équation du second degré à une inconnue réelle.

Questions destinées aux candidats du CAPLP

1. Rédiger un corrigé de ce devoir, en justifiant la formule donnée pour $\mathscr{A}_n$ et en précisant les savoir-faire évalués dans chacune des questions (en annexe 1 figurent les parties I et III des programmes des baccalauréats professionnels industriels).

2. Les questions 4 a) et 4 c) ont posé des difficultés à certains élèves. En annexe 2 se trouvent des extraits de copies d'élèves.

   2.1. Analyse des réponses à la question 4 a)

   a) Lister les éventuelles erreurs qui figurent dans les extraits de copie.

   b) Déterminer les causes possibles de ces erreurs.

   2.2. Analyse des réponses à la question 4 c)

   c) Lister les éventuelles erreurs qui figurent dans les extraits de copie.

   d) Déterminer les causes possibles de ces erreurs.

3. Proposer une modification de l'énoncé permettant d'évaluer des compétences relatives aux suites numériques.

4. La lecture des copies montre que certains élèves de cette classe, qui ont été scolarisés en lycée général ou technologique, savent résoudre une équation du second degré.

   Proposer une organisation de la séquence qui traitera cette notion :
   - en prenant comme situation d'approche celle étudiée dans ce devoir,
   - en tenant compte de l'hétérogénéité des acquis des élèves.

Exercice 2

Préciser, en argumentant la réponse, si chacune des propositions ci-dessous est vraie ou si elle est fausse.

Remarque : la réponse « proposition vraie » ou « proposition fausse » ***non argumentée*** *ne rapporte* ***aucun*** *point.*

Proposition 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 3)^2$ est l'image, par la translation de vecteur $3\vec{i}$, de la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.

Proposition 2

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, dérivable. Si la fonction f est paire, alors sa dérivée f' est impaire.

Proposition 3

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, dérivable. Soient a et b deux nombres réels. Si $a \leq b$ et si $f(a) \leq f(b)$, alors f est croissante sur l'intervalle $[a , b]$.

Proposition 4

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle $]a\ ,\ b[$ et soit x_0 un nombre réel de cet intervalle.

Si $f'(x_0) = 0$, alors la fonction f admet un extremum au point d'abscisse x_0.

Proposition 5

Soit une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ,\ 5]$ par $f(x) = \sqrt{x(5 - x)}$. La fonction f est continue en 0 et en 5, donc elle est dérivable en 0 et 5.

Exercice 3

Cet exercice fait appel au langage des probabilités.

Une société d'autoroute veut tester un nouveau dispositif de « télé-péage » en simulant des passages de véhicules à la barrière de péage. Ces simulations ne prennent pas en compte l'usure du dispositif et sont indépendantes les unes des autres.

Une simulation de passage d'un véhicule comporte deux étapes :

- Étape 1 : déclenchement de l'ouverture de la barrière à l'arrivée du véhicule ;
- Étape 2 : si l'étape 1 fonctionne, déclenchement de la fermeture de la barrière après le passage du véhicule.

On note a la probabilité qu'une panne apparaisse à l'étape 1 ($a \in\ ]0\ ,\ 1[$).

Dans le cas où il n'y a pas eu de panne lors de l'étape 1, la probabilité qu'une panne apparaisse à l'étape 2 sera notée b ($b \in\ ]0\ ,\ 1[$).

Le test consiste à enchaîner des simulations de passages de véhicules tant que le système fonctionne sans avoir de panne.

Pour n entier naturel non nul, on définit trois évènements :

A_n : une panne se produit lors de la première étape de la n-ième simulation.

B_n : la première étape de la n-ième simulation se déroule normalement, mais une panne se produit lors de la seconde étape.

C_n : la n-ième simulation s'est déroulée sans aucune panne.

1. Calculer en fonction de a et b la probabilité des événements A_1, B_1, C_1.

2. Représenter (à l'aide d'un arbre par exemple) tous les événements pouvant survenir à l'issue d'au plus deux simulations de passage. Calculer la probabilité de ces événements.

3. Calculer, en fonction de n, a et b, la probabilité des événements A_n, B_n et C_n.

4. a) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (1 - \alpha)^n\ (1 - \beta)^n$ où α et β sont deux nombres réels strictement positifs et strictement inférieurs à 1.
   Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

   b) Quelle conclusion peut-on en tirer en ce qui concerne le test étudié ?

Exercice 4

Dans cet exercice on teste la méthode d'Euler sur des portions de courbe de fonctions connues afin d'apprécier la qualité des approximations obtenues.

On sait qu'une fonction dérivable sur un intervalle I est entièrement définie sur I par sa fonction dérivée et l'image d'un nombre réel de l'intervalle I.

Soit f une fonction d'une variable réelle, dérivable sur un intervalle $[a\ ,b]$ où a et b sont deux nombres réels. **La méthode d'Euler** permet d'approcher sa courbe représentative C à l'aide d'une ligne brisée représentative d'une fonction affine par morceaux continue sur l'intervalle $[a\ ,b]$.
Ayant choisi un pas h, on construit la suite des points $M_n\ (x_n\ ,\ y_n)$, définis par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases} \text{(I)} \qquad \begin{cases} y_0 = f(a) \\ y_{n+1} = y_n + h.f\,'(x_n) \end{cases} \text{(II)} \qquad \text{tant que } x_n \text{ est dans l'intervalle } [a\ ,b].$$

Il suffit alors de joindre les points successifs de cette suite par des segments de droite.

Partie I : La fonction « carré »

L'objet de cette partie du problème est de tester la méthode d'Euler sur la portion C de parabole, courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = x^2$.

On sait que la fonction f est aussi définie par le système :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in [0,1], \not{f}\,'(x) \quad 2x. \end{cases}$$

1.Tracer les approximations de la courbe C obtenues sur l'intervalle $[0,1]$:

1.1. avec un pas h = 0,25.
1.2. avec un pas h = 0,1.

Préciser pour chaque pas, dans un tableau, les coordonnées des points $M_n\ (x_n\ ,\ y_n)$ utilisés dans la construction.
Décrire brièvement l'utilisation de la calculatrice pour mener à bien les calculs (table ou tableur).

2. Soit N_0 un entier naturel non nul. On prend pour pas : $h = \dfrac{1}{N_0}$.

La suite des points $M_n\ (x_n\ ,\ y_n)$ est alors définie pour n de 0 à N_0.

2.1. Déterminer en fonction de n les coordonnées du point $M_n\ (x_n\ ,\ y_n)$, pour n de 0 à N_0.

2.2. Prouver que l'approximation obtenue pour $f(\dfrac{n}{N_0})$ est $y_n = x_n^2 - \dfrac{n}{N_0^2}$.

2.3. Comment faut-il choisir le pas pour que l'erreur obtenue sur $f\,(1)$ soit inférieure ou égale à $\dfrac{1}{1000}$?

Partie II : La fonction « inverse »

En appliquant la méthode d'Euler sur l'intervalle $[1,2]$, avec un pas $h = \frac{1}{N_0}$, on peut obtenir une approximation de la fonction g définie sur l'intervalle $[1,2]$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

L'objet de cette partie est de majorer l'erreur commise sur le calcul de $g(2)$ par cette approximation.

La fonction g est aussi définie par le système :

$$\begin{cases} g(1) = 1 \\ \forall\, x \in [1,2]\,,\, g'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

1. Montrer que le point M_n $(x_n\,,y_n)$, pour tout n de 1 à N_0, a ici pour ordonnée :

$$y_n = 1 - N_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(N_0+k)^2}$$

2. L'approximation (A) obtenue ici pour $g(2)$ est donc :

$$\text{(A)} \quad y_{N_0} = 1 - N_0 \sum_{k=0}^{N_0-1} \frac{1}{(N_0+k)^2}$$

On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k)^2}$ et $I_n = \int_n^{2n} \frac{1}{x^2}\, dx.$

En utilisant un encadrement de l'intégrale I_n qui fasse intervenir S_n, puis en calculant la valeur de I_n, établir que :

$$\frac{1}{2n} \leq S_n \leq \frac{1}{2n} \quad \frac{3}{4n^2} \ .$$

En déduire une majoration de l'erreur obtenue sur $g(2)$ par l'approximation (A).

Indiquer une valeur du pas telle que l'erreur obtenue sur $g(2)$ soit inférieure ou égale à $\frac{1}{1000}$.

Partie III : La fonction exponentielle

En appliquant la méthode d'Euler on peut approcher la courbe représentative de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0,1]$, définie ici par le système :

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \forall x \in [0,1],\ \varphi'(x) \quad \varphi(x) \end{cases}$$

On a donc : $\varphi'(0) = 1$.

La fonction dérivée de φ n'est pas supposée connue dans ce cas : pour calculer la valeur approchée y_{n+1} de $\varphi(x_{n+1})$, on remplace $\varphi'(x_n)$ par la valeur approchée y_n de $\varphi(x_n)$ obtenue au rang n.

On suppose connu le nombre $e = \varphi(1)$.

1. On utilise pour pas : $h = \dfrac{1}{N_0}$. Montrer que le point M$_n$ (x_n , y_n) a pour ordonnée, pour tout entier n de 1 à N_0 :

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{N_0}\right)^n .$$

2. En utilisant la calculatrice déterminer une valeur du pas telle que l'erreur obtenue sur le nombre $\mathrm{e} = \varphi(1)$ soit inférieure ou égale à $\dfrac{1}{1000}$. Expliciter la méthode employée.

Annexe 1

Extraits de programmes des baccalauréats professionnels industriels

I - ACTIVITÉS NUMÉRIQUES ET GRAPHIQUES

La résolution de problèmes, issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, des autres disciplines et de la vie courante constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés les différentes phases de la résolution d'un problème :

- analyse de l'énoncé conduisant au choix de la méthode, si elle n'est pas imposée ;
- mise en oeuvre de la méthode (résolution) et contrôle des différentes étapes ;
- vérification, exploitation et présentation des résultats.

Dans cette perspective, il convient de répartir les activités tout au long de l'année et d'éviter toute révision systématique a priori. Les travaux s'articulent suivant trois axes :

- consolider les techniques élémentaires de calcul ;
- consolider la pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique, en relation étroite avec l'étude des fonctions ;
- poursuivre l'étude des équations et inéquations à une inconnue et des systèmes linéaires d'équations et d'inéquations.

Il convient d'exploiter conjointement les aspects graphiques, numériques et algébriques, ainsi que l'étude de variations de fonctions ; les activités doivent combiner les expérimentations graphiques et numériques, avec les justifications adéquates. Pour toutes ces questions, la calculatrice est un outil efficace. Il convient d'exploiter également les possibilités de l'outil informatique.

a) Suites arithmétiques et géométriques Notation u_n. Expression du terme de rang n. Somme des k premiers termes.	Il s'agit de consolider les acquis antérieurs. L'objectif est de familiariser les élèves avec la description de situations simples conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques.
b) Polynômes du second degré Résolution algébrique de l'équation du second degré. Factorisation d'un polynôme du second degré.	L'existence de solutions est à mettre en évidence d'une part graphiquement, d'autre part algébriquement, à partir d'exemples où les coefficients sont numériquement fixés. L'élève doit savoir utiliser les formules de résolution ; ces formules sont admises.

Champ des activités

Exemples d'étude de situations conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques.	
Résolution algébrique d'une équation du second degré.	Le recours aux formules générales est à éviter si la factorisation est donnée ou immédiate.

Exemples d'étude de situations conduisant à une équation ou une inéquation à une inconnue.	La résolution d'une inéquation peut s'effectuer graphiquement ou en utilisant un tableau de signes ; si le degré excède deux, des indications doivent être fournies.
Résolutions graphique et algébrique d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Exemples d'étude de situations conduisant à des systèmes linéaires d'équations ou d'inéquations à deux inconnues à coefficients numériquement fixés.	

III - ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

Mettant en oeuvre les connaissances de géométrie ou de trigonométrie du programme de BEP, cette partie ne comporte que la rubrique " Champ des activités ". En outre, elles peuvent constituer un support pour les notions nouvelles du programme.

Champ des activités

Exemples d'étude de problèmes liés à la profession, faisant intervenir dans le plan des constructions géométriques de configurations simples, des transformations géométriques (symétrie axiale, symétrie centrale, translation) ou conduisant à des calculs simples de distances, d'angles, d'aires.	Toutes les indications utiles doivent être fournies.
Exemples d'étude de solides usuels conduisant à l'utilisation de sections planes ou à des calculs de distances, d'angles, d'aires ou de volumes.	Toutes les indications utiles doivent être fournies.

Annexe 2 Extraits de copies d'élèves.

Les extraits des copies sont, le plus possible, fidèles à la réalité. Les fautes d'orthographe ont été corrigées et quelques fautes de syntaxe éliminées pour une meilleure compréhension des solutions proposées.

Elève A.

4- a) A chaque tour de bôme, la voile se réduit.

Au 1er tour elle perd 0,8 m en hauteur (10 – 9,2). Au 2nd tour, elle perd aussi 0,8 m (9,2 – 8,4).

Au 1er tour elle perd 0,48 m sur la base (6 – 5,52). Au 2nd tour, elle perd aussi 0, 48 m (5,52 – 5,04).

On peut dire qu'à chaque tour de bôme, la voile perd 0,8 m en hauteur et 0,48 m sur la base.

	hauteur	base
3ème tour	8,4 – 0,8 = 7,6	5,04 – 0,48 = 4,56
4ème tour	7,6 – 0, 8 = 6,8	4,56 – 0,48 = 4,08
5ème tour	6,8 – 0,8 = 6	4,08 – 0,48 = 3,6
6ème tour	6 – 0,8 = 5,2	3,6 – 0,48 = 3,12
7ème tour	5,2 – 0,8 = 4,4	3,12 – 0,48 = 2,64
8ème tour	4,4 – 0,8 = 3,6	2,64 – 0,48 = 2,16
9ème tour	3,6 – 0,8 = 2,8	2,16 – 0,48 = 1,68
10ème tour	2,8 – 0,8 = 2	1,68 – 0,48 = 1,2
11ème tour	2 – 0,8 = 1,2	1,2 – 0,48 = 0,72
12ème tour	1,2 – 0,8 = 0,4	0,72 – 0,48 = 0,24

Au 13ème tour, il n'y a plus assez de tissu donc $n < 13$.

4- c)

	hauteur	Base	aire
3ème tour	7,6	4,56	17,33
4ème tour	6,8	4,08	13,87
5ème tour	6	3,6	10,8
6ème tour	5,2	3,12	8,11
7ème tour	4,4	2,64	5,80
8ème tour	3,6	2,16	3,88
9ème tour	2,8	1,68	
10ème tour	2	1,2	
11ème tour	1,2	0,72	
12ème tour	0,4	0,24	

J'en déduis que c'est au 5ème tour que l'aire est proche de 10 m^2 mais qu'on peut pas avoir une aire exactement égale à 10 m^2 avec un nombre entier de tours de bôme.

Elève B.

4- a) Entre chaque tour, il y a 0,8 :

$10 - 9{,}2 = 0{,}8$ $\qquad$ $9{,}2 - 8{,}4 = 0{,}8$

Pour prouver que $n < 13$, il faut faire $0{,}8 \times 13 = 10{,}4$

10,4 étant supérieur à 10 on peut dire que $n < 13$.

4- c)

Pour prouver que $\mathscr{A}_n$ peut être égale à 10 m^2, il faut résoudre :

$10 = 0{,}192\, n^2 - 4{,}8\, n + 30$

$10 = n\, (0{,}192\, n - 4{,}8) + 30$

$10 - 30 = n\, (0{,}192\, n - 4{,}8)$

$-20 = n\, (0{,}192\, n - 4{,}8)$. Cette équation est impossible à résoudre.

Elève C.

4- a)
$\mathscr{A}(AB_1C_1) - \mathscr{A}(AB_2C_2) = 30 - 25{,}39 = 4{,}61$ m^2
$\mathscr{A}(AB_2C_2) - \mathscr{A}(AB_1C_1) = 25{,}39 - 21{,}17 = 4{,}22$ m^2
La variation n'est pas la même alors je ne sais pas faire.

4- c)
Pour prouver que $\mathscr{A}_n$ peut être égale à 10 m^2, il faut résoudre :

$$10 = 0{,}192\, n^2 - 4{,}8\, n + 30$$
$$0 = 0{,}192\, n^2 - 4{,}8\, n + 20$$
$$\Delta = 4{,}8^2 - 4 \times 0{,}192 \times 20 = 7{,}68.$$

Deux solutions :

$$n_1 = \frac{4{,}8 + \sqrt{7{,}68}}{2 \times 0{,}192} = 15{,}27 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{4{,}8 - \sqrt{7{,}68}}{2 \times 0{,}192} = 5{,}07$$

Elève D.

4- a)
A chaque tour, la hauteur diminue de 0,8 m. On peut écrire :
$10 - n \times 0{,}8 = 0$
$10 = n \times 0{,}8$
$n = \dfrac{10}{0{,}8} = 12{,}5$ donc $n < 13$.

4- c)
$0{,}192\, n^2 - 4{,}8\, n + 30 = 10$
$0{,}192\, n^2 - 4{,}8\, n + 20 = 0$

$\Delta = -4{,}8^2 - 4 \times 0{,}192 \times 20 = -38{,}4$ donc il n'y a pas de solution.

Elève E.

4- a)
Pas de réponse.

4- c)
Non, nous ne pouvons pas obtenir une aire égale à 10 m^2 pour la surface de la voile, car il faudrait que la voile de base soit un triangle isocèle, ce qui n'est pas le cas.
Pour calculer la valeur de n pour l'obtention de l'aire la plus proche de 10 m^2, je me sers de la formule suivante :

$$\mathscr{A}_n = \frac{b \times h}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Je pars du principe que mon triangle rectangle est isocèle
donc $10 = \dfrac{a^2}{2}$
$a^2 = 20$
$a = \sqrt{20}$
La valeur me permettant d'obtenir 10 m^2 est $\sqrt{20}$ soit 4,47 m.