3- ÉPREUVES D'ADMISSIBILITÉ (ÉCRITES)

3-1 SUJETS DE LA SESSION 2003

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Le sujet est constitué de trois exercices.

Le premier exercice, de nature pédagogique, a pour objet le traitement d'un exercice au niveau du baccalauréat professionnel, suivi d'une analyse didactique.

Le deuxième exercice, de géométrie, permet de caractériser les pieds des bissectrices d'un triangle et ensuite d'établir une propriété classique des tangentes à une ellipse.

Le troisième exercice, d'analyse, est constitué de trois parties : il a pour objet d'étudier une fonction et de calculer une intégrale.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies, ainsi que, dans le premier exercice concerné, le savoir-faire pédagogique et l'intervention de méthodes en conformité avec les programmes en vigueur dans les lycées professionnels.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

PREMIER EXERCICE

L'exercice qui figure ci-après est supposé se situer au niveau du baccalauréat professionnel.

1- Traiter les questions 1., 2.*a*., 2.*b*. et calculer $\overline{S}$ (question 3.c.).
2- Le signal étudié est discontinu : lors du traitement de cet exercice en classe, quels peuvent être les commentaires du professeur ?
3- À partir de cet exercice et d'autres exemples, construire une activité destinée à des élèves permettant d'illustrer le calcul de la valeur moyenne d'une fonction périodique. Expliciter en argumentant le scénario proposé.
La page annexe regroupe des extraits des programmes des baccalauréats professionnels.

Exercice :

« Dans tout ce problème T désigne le nombre réel $\frac{1}{50}$.

On considère le signal s, de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T tel que :

1. Compléter le tableau :

t	0	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$s(t)$						

2. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy) de votre choix,
a. Construire la représentation graphique du signal s considéré sur l'intervalle [0 ; T].
b. Construire le graphique permettant de visualiser dans le repère (Ot, Oy) le signal s considéré sur l'intervalle [$-T$; $2T$].

3. *a.* Soit l'intégrale J = $\int_{\frac{T}{4}}^{T} 2\,\mathrm{d}t$. Montrer que J = $\frac{3}{100}$.

b. Calculer la fonction dérivée de la fonction définie sur l'intervalle [0 ; $\frac{T}{4}$] par $t \mapsto \sin(100\pi t)$.

En déduire une primitive de la fonction définie sur l'intervalle [0 ; $\frac{T}{4}$] par $t \mapsto 6\cos(100\pi t)$.

Soit l'intégrale I telle que I = $\int_{0}^{\frac{T}{4}} s(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que I = $\frac{3}{50\pi} + \frac{1}{100}$.

c. La valeur moyenne $\overline{S}$ du signal s sur l'intervalle [0 ; T] est égale à $\frac{1}{T}$(I +J).

Calculer la valeur exacte de $\overline{S}$ puis sa valeur arrondie à 10^{-2}. »

DEUXIÈME EXERCICE

PARTIE A

Caractérisation barycentrique des pieds des bissectrices d'un triangle

Soit (ABC) un triangle non aplati du plan affine euclidien. On note comme suit les longueurs respectives de ses côtés : BC = a, CA = b, AB = c.

La bissectrice intérieure issue du sommet A du triangle coupe le segment [BC] au point noté U. Si la bissectrice extérieure issue de A coupe la droite (BC), on appelle V le point d'intersection.

Le barycentre de trois points M, M' et M'' affectés des coefficients p, p' et p'' est noté :

$$\{(M\ ,\ p)\ ;\ (M'\ ,\ p')\ ;\ (M''\ ,\ p'')\}.$$

1- *a*. En exprimant de deux façons différentes l'aire de chacun des triangles (ABU) et (ACU), prouver que

$$\frac{UB}{UC} = \frac{AB}{AC}.$$

b. En déduire que U est le barycentre $\{(B\ ,\ b)\ ;\ (C\ ,\ c)\}$.

c. Montrer que les trois bissectrices intérieures du triangle (ABC) sont concourantes en un point I qui est le barycentre $\{(A\ ,\ a)\ ;\ (B\ ,\ b)\ ;\ (C\ ,\ c)\}$.

2- *a*. À quelle condition sur b et c le point V existe-t-il ?

b. Supposant cette condition remplie, montrer que V est le barycentre $\{(B\ ,\ b)\ ;\ (C\ ,\ -c)\}$.

c. Vérifier l'existence du barycentre $\{(A\ ,\ a)\ ;\ (B\ ,\ -b)\ ;\ (C\ ,\ -c)\}$. Indiquer trois droites particulières du triangle (ABC) à l'intersection desquelles ce barycentre est situé.

PARTIE B

Une propriété de la tangente en un point d'une ellipse.

Soient deux réels a et b tels que $a > b > 0$.

Soit ( ) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On note $F(c\ ,\ 0)$ et $F'(-c\ ,\ 0)$ les foyers de l'ellipse.

Soit $A(x_A\ ,\ y_A)$ un point de ( ) distinct des sommets de l'ellipse.

1- Montrer que la droite (T_A), tangente à ( ) en A, admet pour équation : $\frac{x_A}{a^2}x + \frac{y_A}{b^2}y = 1$.

2- Déterminer les coordonnées du point V, intersection de (T_A) avec l'axe des abscisses.

3- Vérifier la relation : $a^2AF^2 = a^2(x_A - c)^2 + (a^2 - c^2)(a^2 - x_A^2)$.

4- Écrire de manière analogue une expression de $a^2AF'^2$ (ne pas détailler les calculs).

5- Montrer la relation : $\frac{AF^2}{AF'^2} = \frac{VF^2}{VF'^2}$.

6- Que représente la droite (T_A) dans le triangle (AFF′) ?

TROISIÈME EXERCICE

PARTIE A

L'objectif de cette partie est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x+1} \quad \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2- Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur l'intervalle $[0\ ,+\infty[$.
Donner l'expression de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ,+\infty[$.
3- *a*. Montrer que l'équation $\ln(x) + x + 1 = 0$ admet, sur l'intervalle $]0\ ,+\infty[$, une solution unique que l'on notera α.
b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$.
4- Tracer la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal d'unités graphiques :
axe des abscisses, 5 cm pour 1 unité, axe des ordonnées, 10 cm pour 1 unité.

PARTIE B

Dans cette partie, on calcule la somme d'une série numérique au moyen d'un développement en série de Fourier.

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, telle que $g(x) = x(2\pi - x)$ si $0 \leq x < 2\pi$.
1- Esquisser sommairement la représentation graphique de la fonction g sur l'intervalle $[-2\pi\ ,4\pi]$.
2- Calculer les coefficients de Fourier de la fonction g, et prouver que, pour tout réel x, on a:

$$g(x) = \frac{2\pi^2}{3} \quad 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\ .$$

3- Montrer la relation $\dfrac{\pi^2}{12} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

PARTIE C

On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout entier naturel k, $k \geq 1$, on pose $f_k(x) = x^k \ln(x)$ pour $x > 0$ et $f_k(0) = 0$.
1- Vérifier que f_k est continue sur l'intervalle $[0\ ,+\infty[$.
2- Pour tout entier naturel k, calculer l'intégrale $I_k = \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.
3- *a*. Pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ,+\infty[$, montrer que :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}\ .$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$I = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k + (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4- *a*. Montrer que $\left| I - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k \right| \leq \dfrac{\alpha}{n+1}$.
b. En déduire la valeur de I.

ANNEXE : EXTRAIT DU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

DU BACCALAURÉAT PROFESSIONNEL
Métiers de l'électricité

BO N° 11 du 15 JUIN 1995

e) Nombres complexes

…

Forme trigonométrique : module, argument. Module et argument du produit de deux nombres complexes.

Les notations normalisées sont :
- $|z|$ pour le module du nombre complexe z,
- $\arg z$ pour son argument.

Aucune étude théorique n'est à faire sur ce point et les formules nécessaires sont admises

f) Étude de signaux périodiques

Approximation d'un signal périodique par un polynôme trigonométrique.
Formule de Parseval.

Aucune connaissance n'est exigible sur les coefficients des séries de Fourier.
La formule de Parseval est utilisée dans des cas simples, les calculs étant limités aux deux premières composantes du signal qui fournissent une approximation.

g) Équations différentielles

Résolution de l'équation différentielle
$y'' + ay' + by = 0$ où a et b sont réels : existence et unicité de la solution vérifiant des conditions initiales données.

Les résultats sont admis.
Le cas $a = 0$ et $b = \omega^2$ est à étudier plus particulièrement.

Champ des activités

Représentation graphique de fonctions sinusoïdales.
Exemples de construction de la représentation graphique de fonctions périodiques à partir de leur expression algébrique sur un intervalle ayant pour longueur la période.
Exemples d'étude de situations conduisant à l'explicitation d'une fonction périodique à partir d'un graphique.

Il s'agit d'étudier des signaux usuels tels que des signaux « carrés », « triangulaires » ou « sinusoïdaux ». L'étude peut porter sur la recherche de la périodicité, de la parité ou de l'expression algébrique sur un intervalle donné.

Exemples d'étude de situations conduisant à l'addition de deux fonctions périodiques de même période.
Exemples d'étude de situations conduisant à l'exploitation conjointe d'une sinusoïde et du vecteur de Fresnel associé.
Exemples de calculs sur les nombres complexes.

Exemples d'étude de situations conduisant au calcul de la valeur moyenne d'une fonction ou de son carré.

Exemples d'étude de situations conduisant au calcul des premiers harmoniques d'une fonction signal.

Toute technicité est à éviter. Les situations issues de l'électricité et de l'électronique sont à privilégier.
Les situations sont à choisir en liaison avec l'enseignement professionnel. Si elles mettent en jeu des fonctions définies par morceaux, les calculs sont alors effectués intervalle par intervalle.