Concours CAPLP Externe

Sujet de Mathématiques

DURÉE : 4 heures

Ce sujet comprend trois exercices et un problème.

Le premier exercice porte sur diverses notions d'analyse.
Le deuxième exercice est un QCM.
Le troisième exercice traite du calcul de l'intégrale de Gauss en utilisant les intégrales de Wallis.
Le problème a pour but l'étude d'une configuration par les nombres complexes.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction, interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé (conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).

Exercice 1

1. Pour chacune des trois implications suivantes :
   Préciser d'abord si elle est vraie ou fausse, et ensuite :
   - si elle est vraie, la démontrer ;
   - si elle est fausse, donner un contre exemple.

   a) Soient x et y des nombres réels donnés :
      - $(xy > 0 \text{ et } x < y) \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

   b) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de l'ensemble des nombres réels :
      - si f est continue sur I , alors f est dérivable sur I.

   c) Soit f une fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels :
      - si la fonction f est paire alors la fonction dérivée f' est impaire.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   si n^2 est un nombre pair, alors n est pair.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :
   $1+3+5$ .... $(2n \quad 1) \quad n^2$.

Exercice 2 :

Les questions suivantes offrent quatre réponses possibles repérées par les lettres a, b, c et d.
Une réponse et une seule est correcte. Préciser laquelle sans justifier votre réponse.

1. Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout entier $n \geq 0$,

   avec $f(x) = \dfrac{4x-1}{x}$ pour tout nombre réel x non nul.

   a) La suite (u_n) converge vers 4.
   b) la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ·
   c) La suite (u_n) est croissante.
   d) La suite (u_n) converge vers $\dfrac{1}{4}$ ·

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal.
   Soit $a \in [0, \pi]$. On désigne par (E) l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que :
   $a \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq \sin x$.
   L'aire de (E) est égale à $\dfrac{1}{2}$ pour :

   a) $a = \dfrac{2\pi}{3}$
   b) *impossible*
   c) $a = \dfrac{5\pi}{6}$
   d) $a = \dfrac{\pi}{2}$ ·

3. Deux joueurs A et B lancent l'un après l'autre et une seule fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6, non pipé. Le joueur A gagne si l'écart entre les deux résultats est 0, 1 ou 2. Sinon c' est le joueur B qui gagne.
   La probabilité que le joueur A gagne est égale à :
   a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$
   c) $\frac{3}{4}$ d) *autre valeur* .

4. Soient A, B et C trois points distincts du plan affine euclidien. On appelle I le milieu du segment $[AB]$. Soit (E) l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|.$$

   a) (E) est réduit au point C.
   b) (E) est l'ensemble vide.
   c) (E) est une droite passant par le point I et orthogonale à la droite (AB).
   d) (E) est un cercle de centre J milieu du segment $[IC]$.

Exercice 3 :

Le but de cet exercice est le calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ par les intégrales de Wallis.

Partie A : Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on note I_n l'intégrale suivante, dite intégrale de Wallis : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir, pour tout entier naturel n, la relation :
$$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n\,\cdot$$
3. Montrer que la suite de terme général $u_n=(n+1)I_{n+1}I_n$ est constante.
4. En déduire, pour tout entier naturel n, la relation $(n+1)I_n\times I_{n+1}=\frac{\pi}{2}\,\cdot$
5. Montrer que la suite de terme général I_n est strictement positive et décroissante.
6. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\frac{n+1}{n+2}\le\frac{I_{n+1}}{I_n}\le 1$, puis calculer la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_n}$.
7. Démontrer que la suite $\left(\sqrt{n}\times I_n\right)_{n\in N}$ est convergente et calculer sa limite.

<u>Partie B : Calcul de</u> $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x)\,\cdot$$

1. Étudier les variations de la fonction f et montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l' intervalle $]-1\,;+\infty[$,

$$\ln(1+x) \le x\,\cdot$$

2. En déduire que, pour tout nombre réel u et pour tout entier naturel n non nul :

$$u \ge -n \;\Rightarrow\; \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \le e^u\,\cdot$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel $n \ge 1$, on a :

$$\forall t \in \left[0;\sqrt{n}\right],\qquad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \le e^{-t^2} \le \frac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$$

4. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt\,.$$

On cherche à déduire de la question 3. un encadrement de J_n à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.

   a) À l' aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\sin u$, établir une minoration de J_n ·

   b) À l' aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\tan u$, établir une majoration de J_n ·

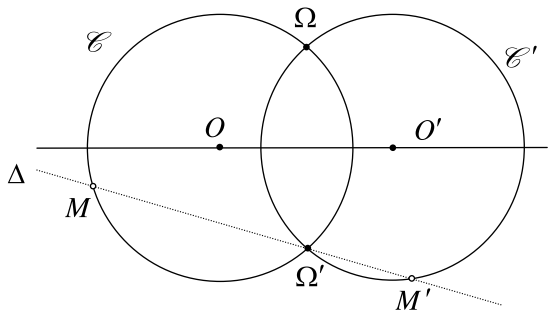
5. En déduire la valeur de l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Problème

Le but de ce problème est l'étude d'une configuration.

On considère:

- deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de même rayon R, de centres distincts O et O', sécants en Ω et Ω'.
- la rotation r de centre Ω qui transforme le point O en O'.



Pour tout point M du cercle $\mathscr{C}$, on note M' son image par la rotation r.

On se propose de démontrer, à l'aide de nombres complexes, que les points M, M' et Ω' sont alignés, puis d'étudier une réciproque.

Notations

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Étant donné une application f de P dans P qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' ($M' = f(M)$), on note $z' = \tilde{f}(z)$.

Étant donné un vecteur $\vec{w}$ du plan P on note $Z_{\vec{w}}$ son affixe.

Lorsque l'application f est une bijection on note f^{-1} la bijection réciproque.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie A : Étude d'un cas particulier

Dans le plan complexe P on se donne :

- le point O' de l'axe réel d'affixe 2 ;
- le point Ω de P d'affixe $1+i$.

1. Démontrer que $\Omega O' = \Omega O$.
2. On considère la rotation r de centre Ω qui envoie O sur O'. Quel est l'angle de cette rotation r ?
3. Les cercles $\mathscr{C}$ de centre O passant par Ω et $\mathscr{C}'$ de centre O' passant par Ω se recoupent en un point Ω'. Quelle est l'affixe ω' de Ω' ?
4. Démontrer que pour tout nombre complexe z : $\tilde{r}(z) = iz + 2$.
5. On considère un point M situé sur le cercle $\mathscr{C}$ et on appelle z son affixe.
   a) Démontrer que le point M' est sur le cercle $\mathscr{C}'$.
   b) Démontrer que les points M, M' et Ω' sont alignés.

Partie B : Étude du cas général

Dans le plan complexe P on se donne :

- un point O' de l'axe réel d'affixe a' non nulle ;
- un point Ω de P, différent du point O, d'affixe ω et tel que : $\Omega O = \Omega O'$.
- la rotation r de centre Ω qui transforme O en O'.

1. Montrer que $\tilde{r}(z) = \left(1 - \dfrac{a'}{\omega}\right) z + a'$.
2. Caractériser la rotation r dans le cas où le point Ω est situé sur l'axe des réels.
3. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par Ω et le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' passant par Ω.
   a) Dans quel cas ces deux cercles sont-ils tangents ?
   b) Dans quel cas ces deux cercles sont-ils sécants ?

4. Lorsque les deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants on appelle Ω' le second point d'intersection de ces deux cercles ; dans le cas où ils sont tangents on pose : $\Omega' = \Omega$.
   On considère un point M d'affixe z situé sur le cercle $\mathscr{C}$, et on note : $M' = r(M)$.
   a) Calculer l'affixe $Z_{\overrightarrow{\Omega' M}}$ du vecteur $\overrightarrow{\Omega' M}$.
   b) Calculer l'affixe $Z_{\overrightarrow{\Omega' M'}}$ du vecteur $\overrightarrow{\Omega' M'}$.
   c) 1er cas : $M \neq \Omega'$
      (c1) Justifier le fait que le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$.
      (c2) Démontrer que $z\overline{z} = \omega\overline{\omega}$ et que $(z' - a')(\overline{z'} - \overline{a'}) = \omega\overline{\omega}$.
      (c3) Démontrer que $\dfrac{Z_{\overrightarrow{\Omega' M'}}}{Z_{\overrightarrow{\Omega' M}}}$ est un nombre réel.
      (c4) Déduire des résultats précédents que les points M, M' et Ω' sont alignés.
   d) 2e cas : $M = \Omega'$
      Montrer que la droite (MM') est tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point Ω'.

Partie C : Étude d'une réciproque

1. Soient $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ deux cercles de même rayon, sécants en deux points distincts Ω et Ω', et Δ une droite passant par Ω'.
   On suppose que Δ recoupe $\mathscr{C}$ en un point M et $\mathscr{C}'$ en un point M'.
   Montrer que M' est l'image de M dans une rotation qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

2. Application :
   Dans la figure ci-contre $\Omega A = \Omega A'$.
   On considère la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre Ω qui transforme le point A en A'.
   a) Reproduire la figure aux dimensions exactes.
   b) Construire, en utilisant le résultat de la question 1, l'image du point B par la rotation $\boldsymbol{r}$. Les traits de construction doivent être visibles.