3-1 SUJET DE MATHÉMATIQUES

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

Le premier exercice, d'analyse, porte sur la résolution d'une équation différentielle et l'étude d'une solution particulière.

Le deuxième exercice, de géométrie, permet d'étudier des aires de triangles grâce aux nombres complexes.

Le problème, d'analyse, est l'étude de l'approximation d'une fonction par une suite de fonctions polynomiales

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

PREMIER EXERCICE

On note le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(\text{O},\ i, j)$.
Soit *(E)* l'équation différentielle $x^2 f'' + x f' + f = 0$, où f désigne une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x , définie sur et à valeurs dans .

1-
a. On pose $x = e^t$ et $u(t) = f(e^t)$. Démontrer que f est solution de *(E)* si et seulement si u est solution de l'équation $u'' + u = 0$. En déduire les solutions de *(E)*.
b. Déterminer la solution particulière de *(E)* qui vérifie les conditions particulières $f(1) = 1,\ f'(1) = -1$.

2-
Soit g la fonction définie sur par:

$$g(x) = \cos(\ln(x)) - \sin(\ln(x))$$

et soit C_g sa courbe représentative dans .

a. Trouver A et α ($A \in$ et $\alpha \in [0\ ,\ 2\pi[$) tels que, pour tout x :

$$g(x) = A\cos(\ln(x) + \alpha).$$

b. En déduire que, pour tout x strictement positif, on a $|g(x)| \leq \sqrt{2}$.

3-
a. Déterminer l'ensemble des points de C_g situés sur l'axe des abscisses.
b. Montrer que les tangentes à C_g en ces points passent toutes par l'un ou l'autre de deux points que l'on déterminera.

4-
Pour tout x strictement positif, on pose :

$$I(x) = \int_1^x \cos(\ln(t))\mathrm{d}t \text{ et } J(x) = \int_1^x \sin(\ln(t))\mathrm{d}t .$$

Vérifier que l'on a : $I(x) - J(x) = x\cos(\ln(x))$-1. En déduire une primitive de g.

5-
On pose, pour tout entier relatif k, $b_k = \exp\left(\frac{\pi}{4} - k\pi\right)$.

a. Démontrer que, sur l'intervalle $]b_{k+1},\ b_k[$, la fonction g a le même signe que $(-1)^k$.
Donner une interprétation géométrique des nombres :

$$u_k = \int_{b_{k+1}}^{b_k} g(t)\mathrm{d}t \text{ et } s_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k u_k .$$

b. Donner une expression simplifiée de s_n en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ et en donner une interprétation géométrique.

DEUXIEME EXERCICE

Définitions et notations

On désigne par le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct (O, e_1,e_2).

désigne le corps des nombres complexes.

Pour tout z∈ , on note respectivement $\bar{z}$, Re(z), Im(z) son conjugué, sa partie réelle et sa partie imaginaire.

M(z) désigne le point de d'affixe *z*. U (*u*) désigne le vecteur d'affixe *u*. $S_{/PQ}$ désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite (PQ).

1-

Dans cette question, on établit une formule donnant la mesure $f(u,v)$ de l'aire algébrique du triangle de sommets A, B, C d'affixes respectifs *a*, *b*, *c* en fonction des affixes respectifs $u=b-a$ et $v=c-a$ des vecteurs U = AB et V = AC. Par convention, la valeur de l'aire est positive lorsque les sommets A, B et C, pris dans cet ordre, sont dans le sens direct ; la valeur de l'aire est négative dans le cas contraire. On procède par conditions nécessaires.

a) Calculer $f(1,\mathrm{i})$.

b) Justifier la relation $f(v,u)=-f(u,v)$ pour *u, v* quelconques.

c) Justifier la relation $f(wu,wv)=w\,\overline{w}\,f(u,v)$, pour *u, v, w* quelconques.

d) Justifier la relation $f(u,\, t_1v_1+t_2v_2)=t_1\,f(u,v_1)+t_2\,f(u,v_2)$ pour u, v_1, v_2 quelconques et t_1, t_2 réels.

e) Prouver que $f(u,v)=\dfrac{1}{4\mathrm{i}}\left(\overline{u}\,v-u\,\overline{v}\right)$.

2-

Soit la droite de passant par le point P d'affixe *p*, orthogonale au vecteur N d'affixe *n*. Soient *z* et *z'* les affixes respectifs de deux points M et M' symétriques par rapport à la droite .

Montrer la relation: $\overline{n}\,z'=\overline{n}\,p-n\,\overline{z}+n\,\overline{p}$.

3-

Dans cette question et dans la suivante, les points A et B ont pour affixes respectifs 1+i et 2. Soient M_1, M_2, M_3 les symétriques respectifs de M d'affixe *z*, par rapport aux droites (OB), (OA), (AB).

a) Déterminer en fonction de *z* les affixes z_1 , z_2 , z_3 de M_1 , M_2 , M_3 .

b) Montrer que, pour que l'aire du triangle $M_1\,M_2\,M_3$ soit égale en valeur absolue à celle du triangle OAB, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\left|\overline{z}+z-z\,\overline{z}\right|=1\,.$$

4-

Construire sur une même figure le triangle OAB et l'ensemble ( ) des points dont l'affixe satisfait à la condition $\left|\overline{z}+z-z\,\overline{z}\right|=1$.

PROBLEME

Les différentes parties de ce problème peuvent être traitées séparément. On pourra admettre les résultats des parties précédentes.

On associe à tout entier naturel n non-nul et à toute fonction numérique f de classe $\mathbf{C}^2$ sur [0 , 1], la fonction polynôme, notée f_n , définie, pour tout réel x appartenant à [0 , 1], par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \; f\left(\frac{k}{n}\right) x^k \, (1-x)^{n-k} \quad (1)$$

avec $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

PARTIE I

Résultats préliminaires

Montrer que, pour tout réel x appartenant à [0 , 1], on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \, k \, x^k \, (1-x)^{n-k} = nx \,.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \, k\,(k-1)\, x^k \, (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \,.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \, (k-n\,x)^2 \, x^k \, (1-x)^{n-k} = n\,x(1-x) \,.$$

PARTIE II

Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on considère la fonction numérique f définie sur [0 , 1] par :

$$f\,(x) = x^2 \,.$$

On appelle f_n la fonction polynôme associée à f par la relation (1).

1- Déterminer f_n.

2- Montrer que :

$$\operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} \left(\left|f_n(x) - f(x)\right|\right) = \frac{1}{4n} \,.$$

PARTIE III

Convergence de $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Dans toute la suite du problème, on désigne par f une fonction numérique quelconque de classe $\mathbf{C}^2$ sur [0 , 1] ; pour tout entier naturel non-nul n, f_n désigne la fonction polynôme associée à f par la relation (1).

On note, pour k entier naturel appartenant à [0 , n] :

$$I_n(k) = \int_0^1 x^k \, (1-x)^{n-k} \, \mathrm{d}x \,.$$

1- a. Déterminer, pour k appartenant à [0 , n-1], une relation de récurrence entre $I_n(k)$ et $I_n(k+1)$.

b. En déduire $I_n(k)$ pour k appartenant à [0 , n].

2- a. Calculer, en fonction de f :

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \,.$$

b. Déterminer, après avoir justifié son existence, la limite quand n tend vers l'infini de :

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \,.$$

PARTIE IV

Convergence de la suite (f_n) vers f sur *[0 , 1]*

1- a. Montrer qu'il existe un réel M_0 vérifiant :

$$M_0 = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]}\left(|f(x)|\right).$$

b. Montrer qu'il existe un réel positif M_1 tel que, pour tout réel x appartenant à [0 , 1] et tout réel x' appartenant à [0 , 1], on a :

$$|f(x') - f(x)| \le M_1|x' - x|.$$

2- En déduire que, pour tout réel α strictement positif, pour tout réel x appartenant à [0 , 1] et tout réel x' appartenant à [0 , 1], on a :

$$|f(x') - f(x)| \le M_1\alpha + \frac{2M_0}{\alpha^2}(x' - x)^2.$$

Indication : on pourra distinguer deux cas : $|x' - x| \le \alpha$ et $|x' - x| > \alpha$.

3- a. Montrer que, pour tout réel α strictement positif, pour tout réel x appartenant à [0 , 1], on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \le M_1\alpha + \frac{M_0}{2n\alpha^2}.$$

b. Pour n fixé, on pose :

$$\delta(n) = \operatorname*{Min}_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\left(M_1\alpha + \frac{M_0}{2n\alpha^2}\right).$$

Montrer que $\delta(n)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\delta(n) = \frac{\beta}{\sqrt[3]{n}} \text{ avec } \beta \text{ indépendant de } n.$$

4- En déduire, pour tout réel x appartenant à [0 , 1] :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$