2AC91-739
Repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2007

CA/PLP

CONCOURS EXTERNE / CAFEP / TROISIÈME CONCOURS
MENTION COMPLÉMENTAIRE

Section : MATHÉMATIQUES – SCIENCES PHYSIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout autre document et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Ce sujet est composé de quatre exercices :

- *Le premier exercice est un test vrai-faux avec justification.*
- *Le deuxième exercice porte sur l'étude d'une suite récurrente et sur le lien géométrique entre les solutions d'une équation différentielle.*
- *Le troisième exercice étudie un déplacement aléatoire entre les sommets d'un triangle en s'aidant de notions d'algèbre linéaire.*
- *Le quatrième exercice a pour but la détermination du minimum de la somme des distances d'un point de l'espace aux sommets d'un tétraèdre.*

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

N.B. : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou si elle est fausse puis :

- si elle est vraie, la démontrer ;
- si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Toute suite réelle convergente est monotone à partir d'un certain rang.
2. Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère $\mathrm{M}(t)$ le point de coordonnées $(f(t), g(t))$ et on note Γ la courbe décrite par le point $\mathrm{M}(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

   Ainsi Γ est la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, t variant dans $\mathbb{R}$.

   L'affirmation est la suivante : si les fonctions f et g sont paires, la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $y'Oy$.
3. La fonction $h : x \longmapsto x\sqrt{|x|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Pour une fonction f continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$, si $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Exercice 2

1. **Étude de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.**

   a) Déterminer l'ensemble D de tous les nombres réels x pour lesquels $f(x)$ est défini.

   b) On pose désormais $f(0) = 0$. La fonction f est-elle alors continue à droite en 0 ?

   c) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

   d) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur $\mathrm{D} \cup \{0\}$. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(\mathrm{e})$, où e est le nombre réel positif tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

2. **Étude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$ où f est la fonction étudiée à la question 1.**

   a) Montrer, par récurrence sur n, que :

   $$\forall n \in \mathbb{N} , \ v_n \geqslant \mathrm{e}.$$

   b) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.

   c) Montrer que :

   $$\forall x \geqslant \mathrm{e} , \ 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

   d) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

e) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

f) Déterminer un entier naturel n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée du nombre réel e à au moins 10^{-12} près.

3. Solutions d'une équation différentielle.

Soit K l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

On note E_1 l'équation différentielle suivante $: -x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x)$.

On recherche les fonctions z solutions de E_1 sur l'intervalle K et qui ne s'annulent pas sur K.

a) On pose $y = \dfrac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on notera E_2.

b) Résoudre l'équation différentielle E_2 sur l'intervalle K.

On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme $g_a : x \longmapsto \dfrac{\ln(ax)}{x}$ où a est un nombre réel strictement positif.

Vérifier que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 1, g_a ne s'annule pas sur K.

On a donc ainsi, pour tout x appartenant à l'intervalle K, $z(x) = \dfrac{x}{\ln(ax)}$.

c) Pour tout nombre réel a strictement positif, on note C_a la courbe représentative de la fonction $f_a : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(ax)}$, dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O.

Montrer que la courbe C_a est l'image de la courbe C_1 par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

Exercice 3

1. Calcul des puissances successives d'une matrice.

On note $\mathcal{B}_c = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On a donc :
$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)\,,\ \overrightarrow{e_2} = (0,1,0)\,,\ \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)\,.$$

On considère les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_c$ est A.

a) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u_1} = (1,-2,1)\,,\ \overrightarrow{u_2} = (1,4,1)\,,\ \overrightarrow{u_3} = (1,0,-1)$.

Vérifier que la famille $\mathcal{B}_n = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Q est ainsi la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}_n$.

b) Calculer Q^2 et Q^3 et vérifier que Q^3 est combinaison linéaire de I_3 et de Q^2.

c) En déduire que la matrice Q est inversible, puis déterminer son inverse Q^{-1}.

d) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ sont des vecteurs propres de l'endomorphisme f. En déduire la matrice A' de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}_n$.

e) Rappeler le lien entre les matrices A', A et Q.

f) En déduire, pour tout nombre entier naturel n non nul, l'expression de la matrice A^n en fonction de A', Q et n.

Pour la suite de l'exercice, on admettra que, pour tout nombre entier naturel n non nul :

$$A^n = \frac{2^n}{6}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \\ 2^{n+2} - 4(-1)^n & 2^{n+2} + 2(-1)^n & 2^{n+2} - 4(-1)^n \\ 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

2. **Étude de la loi d'une variable aléatoire.**

Dans un jeu, un pion se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle, notés S_1,S_2,S_3, selon la règle suivante :

- À l'instant 0, le pion se situe au sommet S_1.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_1, alors à l'instant $n+1$ il sera au sommet S_2.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_2, alors à l'instant $n+1$ il sera au sommet S_1 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, au sommet S_2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, au sommet S_3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si à l'instant n le pion est au sommet S_3, alors à l'instant $n+1$ il sera au sommet S_2.

On appelle X_n la variable aléatoire égale à i si le pion se trouve à l'instant n sur le sommet S_i, et on note a_n, b_n, c_n les probabilités :

$$a_n = P(\{X_n = 1\}), b_n = P(\{X_n = 2\}), c_n = P(\{X_n = 3\}).$$

a) On note T_n la matrice à une colonne : $T_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Préciser les matrices T_0 et T_1.

b) Écrire la matrice M, carrée d'ordre 3, dont le terme situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P_{\{X_n=j\}}(\{X_{n+1} = i\})$, notée aussi $P(\{X_{n+1} = i\} / \{X_n = j\})$.

c) Justifier que les conditions d'application de la formule des probabilités totales sont réunies, puis l'utiliser pour montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$T_{n+1} = MT_n.$$

d) En déduire l'expression de la matrice T_n en fonction de n, T_0 et A, où A est la matrice étudiée à la question 1.

e) En déduire les probabilités a_n, b_n, c_n en fonction de n, ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.

f) Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'espérance de X_n est indépendante de n.

Exercice 4

Dans tout cet exercice, on se place dans l'espace affine euclidien réel $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Soient les points A$(1,0,0)$, B$(0,1,0)$ et C$(0,0,1)$. Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$ de coordonnées (x,y,z) dans le repère $\mathcal{R}$, on note indifféremment $\varphi(\mathrm{M})$ ou $\varphi(x,y,z)$ la quantité :

$$\varphi(\mathrm{M}) = \varphi(x,y,z) = \mathrm{OM} + \mathrm{AM} + \mathrm{BM} + \mathrm{CM}$$

On admettra ici que la quantité $\varphi(\mathrm{M})$ admet un minimum global, noté m, lorsque le point M décrit l'espace $\mathcal{E}$ et on souhaite obtenir la valeur de ce minimum ainsi que le(s) point(s) en le(s)quel(s) ce minimum est réalisé.

1. Calculer et comparer les quantités $\varphi(\mathrm{O}), \varphi(\mathrm{A}), \varphi(\mathrm{B})$ et $\varphi(\mathrm{C})$.
2. Justifier que $0 \leqslant m \leqslant 3$ et que si φ réalise son minimum m en un point P alors OP$\leqslant 3$.
3. Soit r l'application affine de l'espace $\mathcal{E}$ transformant le point M(x,y,z) en le point $\mathrm{M}' = r(\mathrm{M})$ de coordonnées (y,z,x).

   a) Déterminer les images par l'application r des points O, A, B et C.

   b) Vérifier que l'application r est une isométrie, c'est-à-dire que, pour tout couple de points (M, N) de $\mathcal{E}^2$, les distances $r(\mathrm{M})r(\mathrm{N})$ et MN sont égales, c'est-à-dire $\mathrm{M'N'} = \mathrm{MN}$.

   c) Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$, montrer que $\varphi(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{M}')$.

4. Soit Δ la droite passant par le point O et de vecteur directeur $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
   Soit P un point qui n'est pas sur la droite Δ.
   Soient $\mathrm{P}' = r(\mathrm{P})$ et $\mathrm{P}'' = r(\mathrm{P}')$ et soit Q l'isobarycentre des points P, P′ et P″.

   a) Montrer que pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$, on a : $\mathrm{MQ} \leqslant \dfrac{1}{3}(\mathrm{MP} + \mathrm{MP}' + \mathrm{MP}'')$.

   b) En déduire que $\varphi(\mathrm{Q}) - \mathrm{OQ} \leqslant \varphi(\mathrm{P}) - \mathrm{OP}$.

   c) Vérifier que $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = 0$ puis en déduire que $\varphi(\mathrm{Q}) < \varphi(\mathrm{P})$.

   d) Si l'application φ réalise son minimum m en un point P, que sait-on désormais sur ce point P ?

5. On considère la fonction Φ définie en tout nombre réel x par $\Phi(x) = \varphi(x,x,x)$.

   a) Montrer que, pour tout nombre réel x négatif ou nul, $\Phi(x) \geqslant \Phi(0)$.

   b) Étudier le sens de variation de la fonction Φ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   c) En déduire l'existence d'un point P_0 en lequel l'application φ atteint son minimum. Déterminer le point P_0 et le minimum de l'application φ.

6. Vérifier que P_0 est le barycentre du système de points pondérés $\{(\mathrm{O},3),(\mathrm{A},1),(\mathrm{B},1),(\mathrm{C},1)\}$.
   On note θ une mesure de l'angle non orienté $\widehat{\mathrm{AP_0B}}$, choisie dans l'intervalle $[0\,;\pi]$.
   Déterminer la valeur exacte de $\cos(\theta)$ et une valeur approchée à un degré près par défaut de θ.

Remarque : On pourrait vérifier (mais ceci est admis ici) qu'en fait les mesures des angles $\widehat{\mathrm{OP_0A}}$, $\widehat{\mathrm{OP_0B}}$, $\widehat{\mathrm{OP_0C}}$, $\widehat{\mathrm{AP_0B}}$, $\widehat{\mathrm{BP_0C}}$ et $\widehat{\mathrm{CP_0A}}$ choisies dans l'intervalle $[0\,;\pi]$ sont toutes égales à θ.